SAP — TD5 — *Model-checking*

17 mars 2009

1 États accessibles

Nous considérons un système dont l'état est défini par un booléen b et un entier x, avec (b, x) initialisé à $(\mathsf{false}, 0)$. La relation de transition $(b, x) \to (b', x')$ est définie ainsi :

$$b' = \neg b \wedge ((b \wedge x' = x + 1) \vee (\neg b \wedge x' = x - 1)) \tag{1}$$

Quel est l'ensemble des états accessibles ?

2 BDD

2.1 Ou exclusif

Construire un BDD (non signé) pour la relation $a \oplus b \oplus c$ et les variables (a, b, c) dans cet ordre, où $x \oplus y$ désigne le ou exclusif de x et de y.

2.2 Formule en diamant

1. Construire un BDD (non signé) pour la relation $(a \oplus b) \wedge (c \oplus d) \wedge (e \oplus f)$ et les variables (a, b, c, d, e, f) dans cet ordre, où $x \oplus y$ désigne le ou exclusif de x et de y et $x \wedge y$ le et entre x et y.
2. Quelle est la taille du BDD pour l'ordre suivant : (a, c, e, b, d, f) ?
3. Généraliser à $(x_1 \oplus y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \oplus y_n)$ pour les ordres $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.

3 Points fixes

1. Montrer que l'ensemble des états accessibles d'un système de transitions dont les états initiaux sont Σ_0, et la relation de transition τ s'obtient comme la limite de la suite croissante

   $$Y_{n+1} = \Sigma_0 \cup R(Y_n)$$

   avec $R(Y) = \{y \in \Sigma \mid \exists x \in Y\, x \to\ y\}$.
2. Même question pour $Y_{n+1} = Y_n \cup \{y \mid \exists x\ (x, y) \in \tau \wedge x \in Y_n\}$.

3. Montrer que le plus petit point fixe d'une fonction croissante (on dit aussi « monotone ») $f : X \to X$, où tout sous-ensemble de X a une borne inférieure, est la borne inférieure de $\{X \mid f(X) \leq X\}$.

   Pour fixer les idées, on prendra X l'ensemble des parties de Σ ordonnée par l'inclusion $\subseteq$, et donc $f \leq g$ sera équivalent à pour tout $x \subseteq \Sigma$, $f(x) \subseteq g(x)$.
4. Soient f et g deux fonctions monotones telles que $f \leq g$. Montrer que $\operatorname{lfp} f \leq \operatorname{lfp} g$, $\operatorname{lfp} f$ notant le plus petit point fixe de f. Indice : aidez vous de l'exercice précédent.