1. Introduction

Bruno Grenet

Université Grenoble Alpes – IM²AG
L3 Informatique
UE Modèles de calcul – Machines de Turing

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

Contents

1. Informations générales

2. Introduction

3. Machines de Turing

Contents

1. Informations générales

2. Introduction

3. Machines de Turing

Présentation

Nom : Bruno Grenet
Email : ...@univ-grenoble-alpes.fr
Page web : https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/

Affiliation : Université Grenoble Alpes
UFR IM²AG
Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK)
Téléphone : +33 457 421 721
Bureau : Bâtiment IMAG (150 pl. du Torrent) ; 1er étage ; bureau 107

Insérer [MCAL-MT] en sujet

Organisation

Équipe pédagogique

Cours : Bruno Grenet
TD G1 : Linda Gutsche
TD G2 : Thomas Rahab-Lacroix
TD G3 : Linda Gutsche
TD G4 : Bruno Grenet

Contacts : `<Prenom>.<Nom>@univ-grenoble-alpes.fr`

Planning sur huit semaines

Cours : 1 séance par semaine
TD : 1 séance par semaine

Communications

- Email + mattermost
- Consultez ADE !

Évaluations

EC_{MT}: Évaluation continue (*quick*)

$$EC = \frac{1}{2}(EC_{MT} + EC_{LC})$$

Durée : 1h
Date : lundi 9 février 9h45

Coefficient : 0,4
Contenu : cours/TD 1 à 4

ET_{MT}: Évaluation terminale

$$ET = \frac{1}{2}(ET_{MT} + ET_{LC})$$

Durée : 1h
Date : jeudi 23 avril (?)

Coefficient : 0,6
Contenu : tout

ES_{MT}: Évaluation supplémentaire

$$ES = \frac{1}{2}(ES_{MT} + ES_{LC})$$

- Similaire à l'évaluation terminale
- mardi 23 juin (?)

Note finale

commune avec MCAL-LC

Session 1 : $\max(ET; 0,4 \cdot EC + 0,6 \cdot ET)$
Session 2 : $\max(ES; 0,4 \cdot EC + 0,6 \cdot ES)$

Page du cours

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

Contenu

- Diapositives de cours annotées, sujets de TD, annales
- Code et exemples
- Bibliographie :
  - livres, notes de cours
  - liens : vidéos, articles de vulgarisation, sites web, …

→ **Très utile à consulter !**

Contents

1. Informations générales

2. Introduction

3. Machines de Turing

De quoi va-t-on parler ?

Résumé (personnel) de la vidéo

Origines

- *Mécanisation* du raisonnement ? Leibniz (XVII^{e} siècle)
- *Entscheidungsproblem* : existe-t-il un algorithme pour décider si un énoncé mathématique est correct ? Hilbert & Ackermann (1928)
- Années 1930 : intuition de l'absence d'algorithme → comment la prouver ?

Formalisation des algorithmes

- Fonctions μ-récursives Herbrand-Gödel (1931-34)
- λ-calcul Kleene-Church (1932-36)
- Machines de Turing Turing (1936)

Trois définitions prouvées équivalentes → c'est la « bonne » définition !

Incalculabilité

- Pas d'algorithme pour le problème de la décision, le problème de l'arrêt, …

→ Résultats négatifs mais une des origines de l'informatique

Objectifs du cours

Machines de Turing

- Étude d'un des modèles de calcul
- (Autre modèle – λ-calcul – étudié dans l'autre partie du cours)
- Comparaison avec d'autres modèles

Calculabilité

- Qu'est-ce que veut dire *calculer* ?
- Comment démontrer l'*inexistence* d'algorithme pour un problème donné ?
- Liens avec l'informatique *de tous les jours* ?

Avant / après

- Automates et Langages (L2) ; Analyse syntaxique (L3)
  - Automates finis ; automates à pile
- Complexité Algorithmique ; Fundamentals of Computer Science (M1 Mosig / INFO)
  - Théorie de la complexité

Plan (approximatif)

1, 2. Machines de Turing et variantes

- Exemples de machines
- Définition (informelle et formelle)
- Robustesse : les variantes ne changent pas grand chose

3. Thèse de Church-Turing

- Algorithme = Machine de Turing (ou λ-calcul, ou …)
- Équivalence entre modèles

4, 5, 6. Incalculabilité

- Il existe des fonctions non calculables (*diagonalisation*)
- Exemples concrets

7. Fonctions primitives récursives

- Et si on interdisait le `while`?

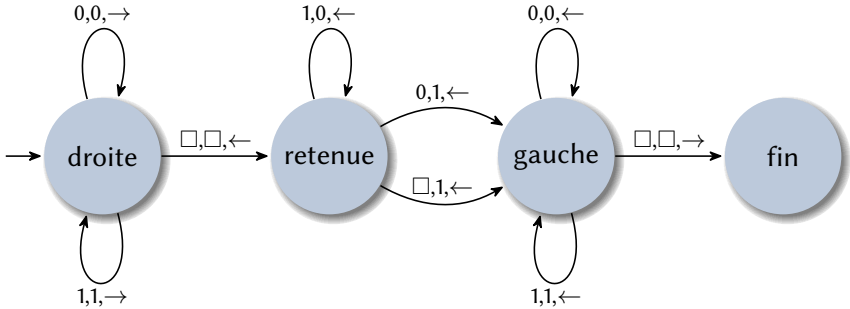
Contents

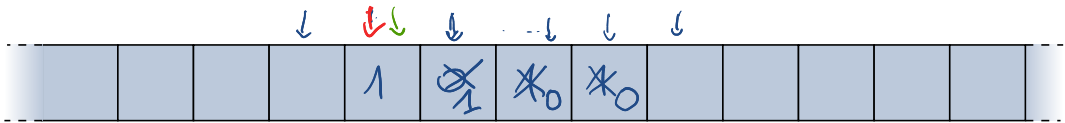
1. Informations générales

2. Introduction

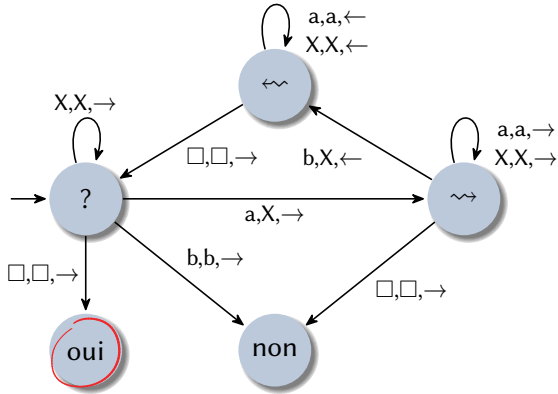
3. Machines de Turing

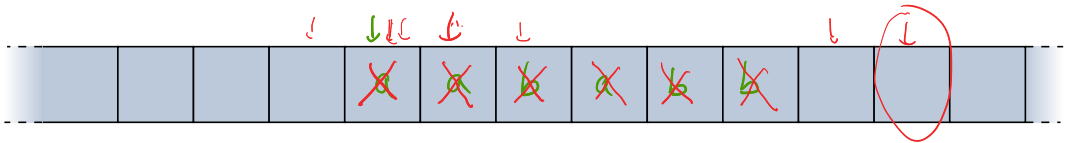
Premier exemple



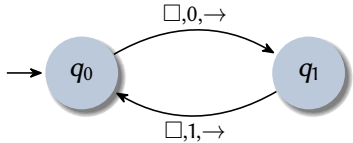


Deuxième exemple



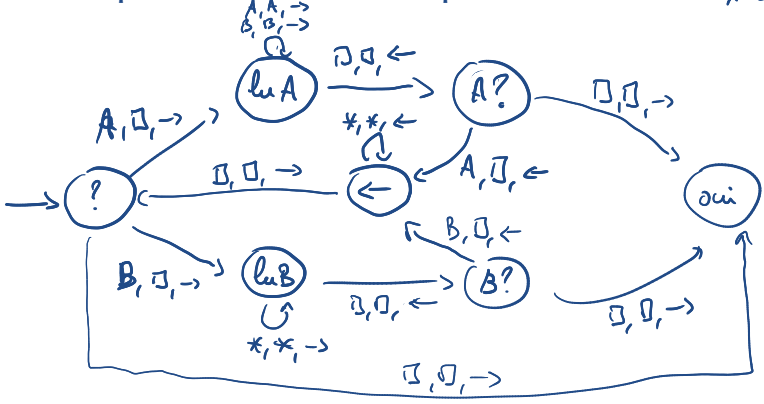


Troisième exemple



Quatrième exemple : reconnaître des palindromes

$* = A$ ou B



Description des machines de Turing

Constituants d'une machine de Turing

- Un ensemble d'*états* Q, dont un *état initial* q_0 — *sommets*
- Une *table de transition* δ — *automate*
- Un *ruban* constitué d'une infinité de *cases*
- Une *tête* de lecture/écriture

Le ruban

- Chaque case du ruban contient un *symbole* d'un *alphabet* Σ
- L'alphabet contient un symbole spécial « blanc » $\square$ — *case vide*
- Le ruban ne contient qu'un nombre fini de symboles $\neq \square$

La table de transition

- Pour *certains* couples $(q, x) \in Q \times \Sigma$, $\delta(q, x) = (q', y, \leftrightarrow)$ où
  - $q, q' \in Q$ sont l'*ancien* et le *nouvel état*
  - x et $y \in \Sigma$ sont les symboles *lu* et *écrit*
  - $\leftrightarrow \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est le *déplacement*
- Sinon, $\delta(q, x)$ est *indéfini*

Formalisation : machine de Turing

Définition

Une machine de Turing est un quadruplet $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$ où

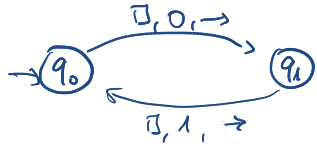
- Q est un ensemble fini d'*états*
- Σ est l'*alphabet* contenant le blanc $\square$
- $q_0 \in Q$ est l'*état initial*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$ est la *table de transition*

Remarques

- Ruban implicite et *non borné* plutôt qu'infini
- Table de transition : fonction *partielle* $\to \delta(q, x)$ peut être *indéfini*
- Il existe d'autres formalisations équivalentes

Exemple

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{\square, 0, 1\}$
- $\delta(q_0, \square) = (q_1, 0, \rightarrow)$, $\delta(q_1, \square) = (q_0, 1, \rightarrow)$



Formalisation : machine de Turing

Définition

Une machine de Turing est un quadruplet $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$ où

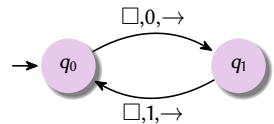
- Q est un ensemble fini d'*états*
- Σ est l'*alphabet* contenant le blanc $\square$
- $q_0 \in Q$ est l'*état initial*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$ est la *table de transition*

Remarques

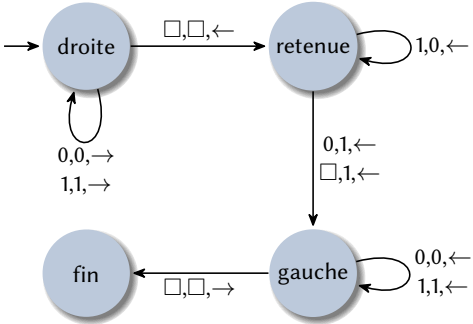
- Ruban implicite et *non borné* plutôt qu'infini
- Table de transition : fonction *partielle* $\to \delta(q, x)$ peut être *indéfini*
- Il existe d'autres formalisations équivalentes

Exemple

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{\square, 0, 1\}$
- $\delta(q_0, \square) = (q_1, 0, \rightarrow)$, $\delta(q_1, \square) = (q_0, 1, \rightarrow)$



Représentation de la table de transition

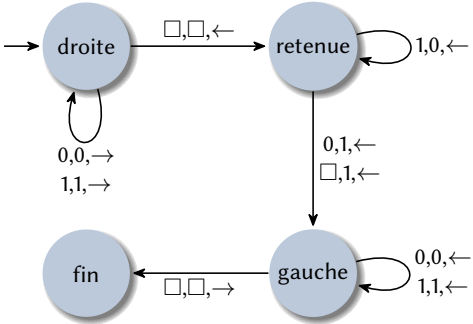


État	Lu	Écrit	Dépl.	Nv. état
droite	0	0	→	droite
droite	1	1	→	droite
droite	□	□	←	retenue
retenue	1	0	←	retenue
retenue	0	1	←	gauche
retenue	□	1	←	gauche
gauche	0	0	←	gauche
gauche	1	1	←	gauche
gauche	□	□	→	fin

- Le tableau de δ suffit à représenter $\mathcal{M}$:
  - Q : liste des états dans la table
  - Σ : liste des symboles dans la table
  - q_0 : 1$^{\text{er}}$ état de la table (par convention)

autre formalisation

Représentation de la table de transition



État	Lu	Écrit	Dépl.	Nv. état
droite	0	0	→	droite
	1	1	→	droite
	□	□	←	retenue
retenue	1	0	←	retenue
	0	1	←	gauche
	□	1	←	gauche
gauche	0	0	←	gauche
	1	1	←	gauche
	□	□	→	fin

- Le tableau de δ suffit à représenter $\mathcal{M}$:
  - Q : liste des états dans la table
  - Σ : liste des symboles dans la table
  - q_0 : 1$^{\text{er}}$ état de la table (par convention)

autre formalisation

Fonctionnement d'une machine de Turing

Une étape de calcul

Machine dans l'état q :

1. Lecture de la lettre x écrite sur le ruban
2. Si $\delta(q, x)$ n'est pas défini : arrêt (définitif) de la machine
3. Si $\delta(q, x) = (q', y, \leftrightarrow)$:
   i. écriture de y à la place de x
   ii. déplacement de la tête à gauche ($\leftarrow$) ou à droite ($\rightarrow$)
   iii. nouvel état : q'

Calcul complet

- *Configuration initiale* : état q_0, entrée w sur le ruban, tête sur la 1ère lettre de w
- Tant que c'est possible, appliquer une étape de calcul
  - Soit la machine se bloque : calcul terminé — $\delta(q, x)$ indéfini
  - Sinon : la machine *boucle*
- Remarque : pas de *sémantique* $\rightarrow$ reconnaissance de langage, calcul de fonction, …

Concept important : configurations

Configuration : état global de la machine à un instant donné

Définition

- Configuration $C = (q, w, i)$:
  - état q
  - mot w sur le ruban
  - position i de la tête sur w
- Représentation graphique : $C = q : w_{[0]} \cdots \check{w}_{[i]} \cdots w_{[n-1]}$
- Configuration initiale $C_0 = q_0 : \check{w}_{[0]} w_{[1]} \cdots w_{[n-1]}$

$i < 0$ ou $i \geq |w|$: tête hors de w

$\check{}$: position de la tête

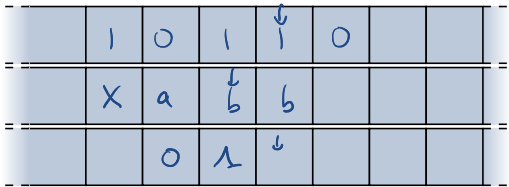
w : entrée

Exemples

D: $101\check{1}0$

q: $Xa\check{b}b$

0: $01\check{\square}$



Suites de configurations

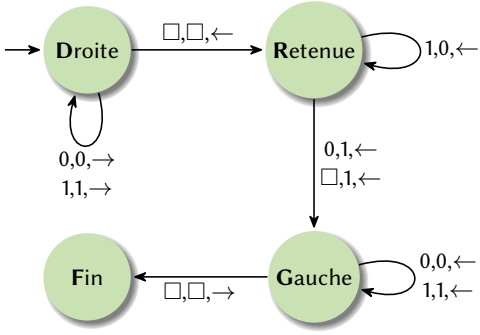
Notations

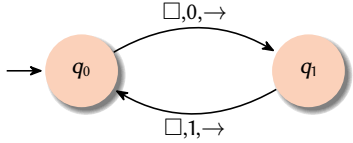
- $C \vdash C'$ si on passe de C à C' en une étape de calcul
- $C \vdash^* C'$ si on passe de C à C' en une ou plusieurs étapes de calcul
  - $C = C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots \vdash C_{k-1} \vdash C_k = C'$
- $C \downarrow$ si aucune règle de la table de transition ne s'applique à C (calcul terminé)

Calcul d'une machine

- Deux possibilités :
  - si la machine boucle : suite infinie $C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots$
  - sinon : suite finie $C_0 \vdash C_1 \vdash \cdots \vdash C_k \downarrow$
- Résultat du calcul de $\mathcal{M}$ sur w :
  - $\mathcal{M}(w) = C_k$ si $C_0 \vdash^* C_k \downarrow$ — *configuration finale*
  - Notation $\mathcal{M}(w) \uparrow$ si la suite est infinie — aucune configuration finale

Exemples





$D : \check{1}011$
$\vdash D : 1\check{0}11$
$\vdash D : 10\check{1}1$
$\vdash D : 101\check{1}$
$\vdash D : 1011\check{\square}$
$\vdash R : 101\check{1}$

$\vdash R : 10\check{1}0$
$\vdash R : 1\check{0}00$
$\vdash G : \check{1}100$
$\vdash G : \check{\square}1100$
$\vdash F : \check{1}100 \downarrow$

$q_0 : \check{\square}$
$\vdash q_1 : 0\check{\square}$
$\vdash q_0 : 01\check{\square}$
$\vdash q_1 : 010\check{\square}$
$\vdash q_0 : 0101\check{\square}$
$\vdots$

Utilisation d'une machine de Turing

Reconnaissance de langage

- Hypothèse : $\mathcal{M}$ contient un état spécial : oui
- Langage $L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$:
  $w \in L(\mathcal{M})$ **ssi** le calcul termine et l'état final est l'état « oui »

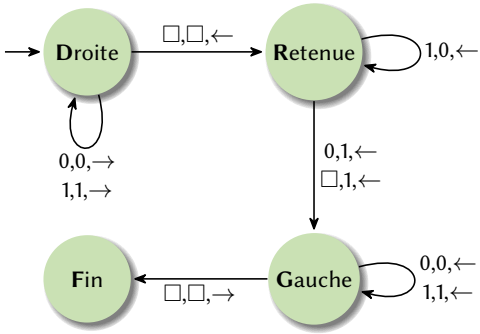
Calcul de fonction

- Fonction $f_{\mathcal{M}}$ calculée par $\mathcal{M}$:
  $f_{\mathcal{M}}(w) = w'$ si le calcul termine, et que le mot w' est écrit sur le ruban
  - $f_{\mathcal{M}}(w)$ est indéfini si $\mathcal{M}(w) \uparrow$, noté $f_{\mathcal{M}}(w) \uparrow$

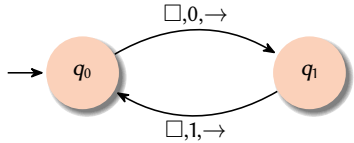
Remarques

- Autres conventions possibles
  - États d'acceptation et de rejet
  - Prise en compte de l'état final et du contenu final du ruban en même temps
- Définition possible d'*énumération* (infinie)

Exemples de fonctions

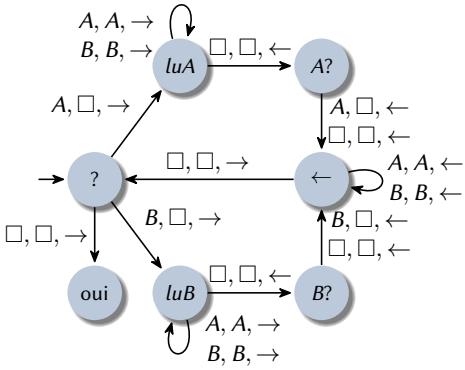


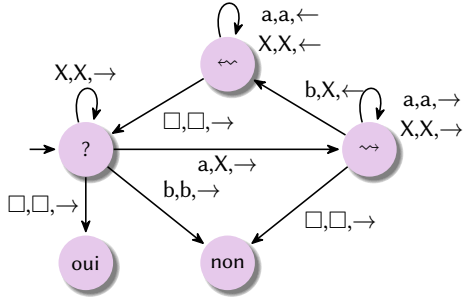
$f_{\pi}(x) = x + 1$ (en binaire)



$$f_{\pi_1}(w) = \begin{cases} w & \text{si } |w| > 0 \\ \text{indéfini} & \text{si } |w| = 0 \end{cases}$$

Exemples de langages

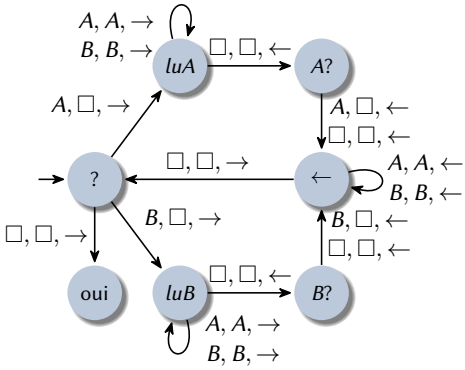


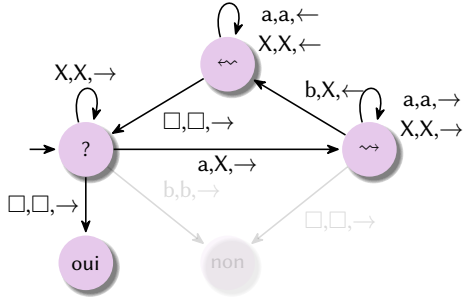


$L(\mathcal{A}) = \{ w \in \{A,B\}^* : w$ est un palindrome $\}$

$L(\mathcal{B}) = \{ w \in \{a,b\}^* : w$ est bien parenthésé $\}$

Exemples de langages





$L(\mathcal{A}) = \{ w \in \{A,B\}^* : w$ est un palindrome$\}$

$L(\mathcal{B}) = \{ w \in \{a,b\}^* : w$ est bien parenthésé$\}$

Conclusion

Machine de Turing

- Extension des automates avec un ruban non borné et une table de transition
- Définitions formelles :
  - Machine de Turing : $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$
  - Table de transition : $\delta =$ tableau à cinq colonnes $(q, x, q', y, \leftrightarrow)$
  - Configuration : $C = (q, w, i)$ $\qquad q : w_{[0]} \cdots \check{w}_{[i]} \cdots w_{[n-1]}$
  - Calcul : $C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots$

Utilisation des machines de Turing

- Reconnaissance : $L(\mathcal{M}) = \{w :$ sur l'entrée $w, \mathcal{M}$ termine dans l'état « oui »$\}$
- Calcul : $f_{\mathcal{M}}(w) =$ mot sur le ruban en fin de calcul, ou $\uparrow$ si la machine boucle

À savoir faire

- Exécuter une machine (simple) sur une entrée
- Décrire le calcul effectué / le langage reconnu par une machine (simple)
- Créer une machine pour un problème simple