Vade-mecum INF124

Conjonction

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge_{\mathrm{E1}} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge_{\mathrm{E2}}$$

Implication et équivalence

$$\frac{\begin{array}{c}\overbrace{A}^{[1]}\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1] \qquad\qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}} \qquad\qquad A \Leftrightarrow B \overset{\text{déf}}{=\!=} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Disjonction

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee_{\mathrm{I1}} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\,\vee_{\mathrm{I2}} \qquad\qquad \frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{B}^{[m]}\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,\vee_{\mathrm{E}}[n,m]$$

Absurde, négation

$$\frac{\bot}{A}\,\bot_{\mathrm{E}} \qquad\qquad \neg A \overset{\text{déf}}{=\!=} A \Rightarrow \bot$$

Logique classique (tiers exclu, double négation)

$$\frac{}{A \vee \neg A}\,\tfrac{1}{3}ex \qquad\qquad \frac{\neg\neg A}{A}\,\neg\neg_{\mathrm{E}}$$

Quantificateurs

$$\frac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(\_)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(\_)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(x_0)\end{array}}{\forall x\; P(x)}\,\forall_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\forall x\; P(x)}{P(t)}\,\forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

Condition d'application de $\forall$I : x_0 ne doit être libre dans aucune des hypothèses disponibles $h_1 \ldots h_n$.
Dans $\forall$E : t représente une constante ou une variable ; $P(t)$ représente la formule $P(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x.

$$\frac{P(t)}{\exists\, x\; P(x)}\,\exists_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\exists\, x\; P(x) \qquad \begin{array}{c}\overbrace{P(y)}^{[h]}\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,\exists_{\mathrm{E}}[h]$$

Conditions d'application de $\exists_{\mathrm{E}}$:
– dans la preuve de C à partir de $P(y)$, y ne doit être libre dans aucune hypothèse disponible exceptée h ;
– C ne doit pas dépendre de y (c-à-d. ne doit pas comporter d'occurrence libre de y).