NOM .... Prénom .... Groupe ...

ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT ....si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

— Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
— Le barème est donné à titre indicatif
— Le sujet comporte 5 exercices indépendants
— Le sujet est sur 45 points.
— Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
— N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
— Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

15 pt

Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français

3 pt

Q1. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \ \wedge \ A) \Rightarrow D))$

$$\frac{}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \ \wedge \ A) \Rightarrow D))}$$

3 pt

Q2. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \;\wedge\; \neg B)$

$$\frac{}{\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \;\wedge\; \neg B)}$$

2.5 pt

Q3. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

4 pt

Q4. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\exists u, (\forall v, F(u,v))) \Rightarrow \big(\forall x, (\exists y, F(y,x))\big)$

$$\frac{}{(\exists u, (\forall v, F(u,v))) \Rightarrow \big(\forall x, (\exists y, F(y,x))\big)}$$

2.5 pt

Q5. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles

10 pt

3 pt

Q6. Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1. $$\dfrac{a \in A \qquad A \subseteq B}{a \in B}$$

2. $$\dfrac{a \in A}{a \in A \cup B}$$

3. $$\dfrac{a \in A \cap B}{a \in A}$$

3 pt

Q7. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème $\big(X \cap (Y \cup X)\big) = X$

$$\frac{}{\big(X \cap (Y \cup X)\big) = X}$$

4 pt

Q8. On désigne l'ensemble vide par $\emptyset$. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème $\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \Longrightarrow \big(\big(X \cap (Y \cup Z)\big) = (X \cap Z)\big)$

$$\frac{}{\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \Longrightarrow \big(\big(X \cap (Y \cup Z)\big) = (X \cap Z)\big)}$$

5 pt

Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type CAML

2.5 pt

Q9. Soit `feu` le type défini par :

```
type feu =
 | Vert
 | Orange
 | Rouge
 | Clignotant of feu
```

— Donnez quatre élements différents de type `feu` de manière à utiliser chacun des constructeurs.

— Complétez le schéma de récurrence associé au type `feu`.

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall f \in \texttt{feu},\ Q(f)}\ \mathit{rec{-}feu}$$

2.5 pt

Q10. Soit `color` le type défini par :

```
type color =
  | R of int (* rouge *)
  | V of  int (* vert *)
  | B of int (* bleu *)
  | M of color * color (* mélange *)
```

— Donnez quatre élements différents du type `color` de manière à utiliser chacun des constructeurs.

— Complétez le schéma de récurrence associé au type `color`.

$$\frac{\begin{array}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}}{\forall c \in \texttt{color},\ Q(c)}\ \mathit{rec{-}color}$$

5 pt

Exercice 4 : Que dire de ces deux régles ?

On se dote d'une nouvelle règle correspondant au raisonnement par « contraposé » :

$$\frac{\neg A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow A}\ \textit{contraposé}$$

On se demande si cette règle est valide et ce que nous apporte par rapport aux règles que l'on a déjà.

2 pt

Q11. Utilisez la règle $\neg\neg_e$ pour démontrer la validité de la règle *contraposé*.

$$\frac{\rule{8cm}{0pt}}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

2 pt

Q12. Démontrez la propositon $\neg\neg A \Rightarrow A$ en utilisant la règle *contraposé* avec un B bien choisi.

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A}$$

1 pt

Q13. D'après les questions précédentes, que peut-on dire des règles $\neg\neg_e$ et *contraposé* ? **Justifiez votre réponse.**

Exercice 5 : Preuve par récurrence en déduction naturelle

10 pt

On considère le type OCAML suivant

```
type nat =
 | Z
 | S of nat
```

1.5 pt

Q14. Rappelez le principe de récurrence associé au type `nat`.

$$\dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\forall n \in \texttt{nat},\ P(n)}\ \textit{rec-nat}$$

Implantation d'un prédicat défini par des axiomes On considère le prédicat *pair* défini par les axiomes suivants :

$$\overbrace{\mathit{pair}(\mathrm{Z})}^{Ax_1} \qquad \overbrace{\forall p,\ \mathit{pair}(\mathrm{S}(p)) \Leftrightarrow \neg \mathit{pair}(p)}^{Ax_2}$$

1.5 pt

Q15. Écrire en CAML la fonction *pair* de type `nat` $\rightarrow$ `bool` qui correspond à ces axiomes.

2 pt

Q16. Utilisez les axiomes qui définissent *pair* pour démontrer, pour un K fixé, la proposition suivante $\neg \mathit{pair}(\mathrm{S}(K)) \Longrightarrow \mathit{pair}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))$

$$\dfrac{}{\neg \mathit{pair}(\mathrm{S}(K)) \Longrightarrow \mathit{pair}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))}$$

5 pt

Q17. Démontrez le théorème suivant $\forall n \in \texttt{nat},\ pair(n) \ \vee \ pair(\mathrm{S}(n))$ en utilisant les axiomes qui définissent *pair*, le principe de récurrence sur `nat` et l'arbre de preuve de la question précédente que vous nommerez ADP_1.

$$\forall n \in \texttt{nat},\ pair(n) \ \vee \ pair(\mathrm{S}(n))$$