

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 5 exercices indépendants
- Le sujet est sur 45 points.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

15 pt

Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français

3 pt

Q1. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \wedge A) \Rightarrow D))$$

$$\overline{(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \wedge A) \Rightarrow D))}$$



3 pt

Q2. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$$\overline{\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}$$



2.5 pt

Q3. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.



4 pt

Q4. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\exists u, (\forall v, F(u, v))) \Rightarrow (\forall x, (\exists y, F(y, x)))$

$$\overline{(\exists u, (\forall v, F(u, v))) \Rightarrow (\forall x, (\exists y, F(y, x)))}$$



2.5 pt

Q5. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.



10 pt

Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles



3 pt

Q6. Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1.
$$\frac{a \in A \quad A \subseteq B}{a \in B}$$

2.
$$\frac{a \in A}{a \in A \cup B}$$

3.
$$\frac{a \in A \cap B}{a \in A}$$



3 pt

Q7. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème $(X \cap (Y \cup X)) = X$

$$\overline{(X \cap (Y \cup X)) = X}$$



4 pt

Q8. On désigne l'ensemble vide par \emptyset . Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème $((X \cap Y) = \emptyset) \implies ((X \cap (Y \cup Z)) = (X \cap Z))$

$$\overline{((X \cap Y) = \emptyset) \implies ((X \cap (Y \cup Z)) = (X \cap Z))}$$

Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type CAML

5 pt

Q9. Soit feu le type défini par :

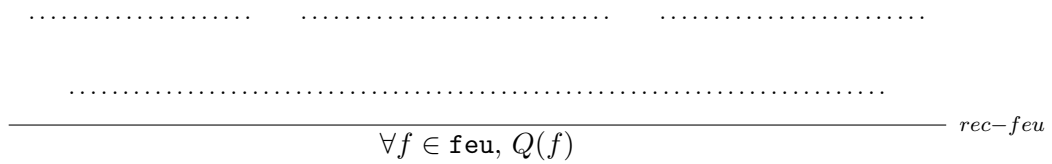


2.5 pt

```
type feu =
| Vert
| Orange
| Rouge
| Clignotant of feu
```

— Donnez quatre éléments différents de type feu de manière à utiliser chacun des constructeurs.

— Complétez le schéma de récurrence associé au type feu.



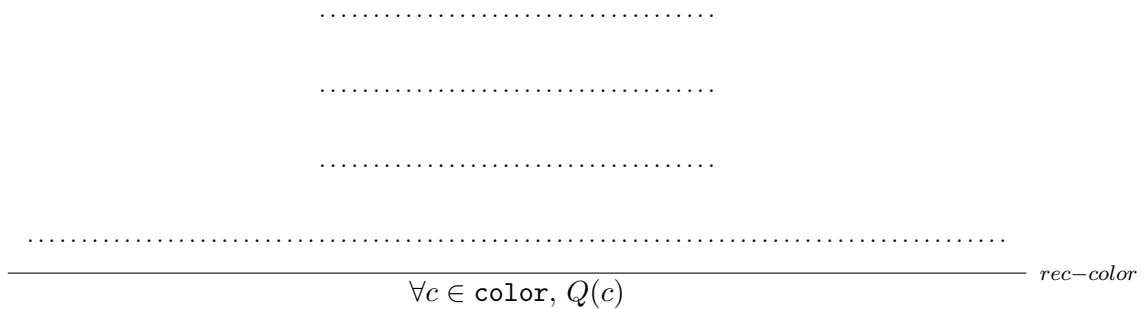
2.5 pt

Q10. Soit color le type défini par :

```
type color =
| R of int (* rouge *)
| V of int (* vert *)
| B of int (* bleu *)
| M of color * color (* mélange *)
```

— Donnez quatre éléments différents du type color de manière à utiliser chacun des constructeurs.

— Complétez le schéma de récurrence associé au type color.





5 pt

Exercice 4 : Que dire de ces deux règles ?

On se dote d'une nouvelle règle correspondant au raisonnement par « contraposé » :

$$\frac{\neg A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow A} \textit{ contraposé}$$

On se demande si cette règle est valide et ce que nous apporte par rapport aux règles que l'on a déjà.



2 pt

Q11. Utilisez la règle $\neg\neg_e$ pour démontrer la validité de la règle *contraposé*.

.....
.....



2 pt

Q12. Démontrez la proposition $\neg\neg A \Rightarrow A$ en utilisant la règle *contraposé* avec un B bien choisi.

$$\overline{\neg\neg A \Rightarrow A}$$



1 pt

Q13. D'après les questions précédentes, que peut-on dire des règles $\neg\neg_e$ et *contraposé* ? **Justifiez votre réponse.**

10 pt

Exercice 5 : Preuve par récurrence en déduction naturelle

On considère le type OCAML suivant

```
type nat =
  | z
  | s of nat
```

1.5 pt

Q14. Rappelez le principe de récurrence associé au type `nat`.

$$\frac{\dots\dots\dots}{\forall n \in \text{nat}, P(n)} \text{rec-nat}$$

Implantation d'un prédicat défini par des axiomes On considère le prédicat `pair` défini par les axiomes suivants :

$$\underbrace{\text{pair}(z)}_{Ax_1} \qquad \underbrace{\forall p, \text{pair}(s(p)) \Leftrightarrow \neg \text{pair}(p)}_{Ax_2}$$

1.5 pt

Q15. Écrire en CAML la fonction `pair` de type `nat → bool` qui correspond à ces axiomes.

1	
2	
3	
4	
5	
6	

2 pt

Q16. Utilisez les axiomes qui définissent `pair` pour démontrer, pour un `K` fixé, la proposition suivante $\neg \text{pair}(s(K)) \implies \text{pair}(s(s(K)))$

$$\overline{\neg \text{pair}(s(K)) \implies \text{pair}(s(s(K)))}$$



5 pt

Q17. Démontrez le théorème suivant $\forall n \in \mathbf{nat}, \text{pair}(n) \vee \text{pair}(s(n))$ en utilisant les axiomes qui définissent *pair*, le principe de récurrence sur **nat** et l'arbre de preuve de la question précédente que vous nommerez ADP_1 .

$\forall n \in \mathbf{nat}, \text{pair}(n) \vee \text{pair}(s(n))$