NOM .... Prénom .... Groupe ...

ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT ....si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 5 exercices indépendants
- Le sujet est sur 45 points.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

15 pt

Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français

3 pt

Q1. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \ \wedge \ A) \Rightarrow D))$

SOLUTION PROPOSÉE PAR LE PROUVEUR INF124

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{C \wedge A}^{H_3}$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$H_3 \vdash C$}
\AxiomC{$\overbrace{B}^{H_2}$}
\AxiomC{$\overbrace{C \wedge A}^{H_3}$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$H_3 \vdash A$}
\AxiomC{$\overbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))}^{H_1}$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$H_3, H_1 \vdash B \Rightarrow (C \Rightarrow D)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$H_2, H_3, H_1 \vdash C \Rightarrow D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$H_2, H_3, H_1 \vdash D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_3]$}
\UnaryInfC{$H_2, H_1 \vdash (C \wedge A) \Rightarrow D$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_2]$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash B \Rightarrow ((C \wedge A) \Rightarrow D)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_1]$}
\UnaryInfC{$(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((C \wedge A) \Rightarrow D))$}
\end{prooftree}
$$

---

3 pt

Q2. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \ \wedge \ \neg B)$

SOLUTION PROPOSÉE PAR LE PROUVEUR INF124

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overbrace{A}^{H_2}$}
\RightLabel{$\vee_{i_1}$}
\UnaryInfC{$H_2 \vdash A \vee B$}
\AxiomC{$\overbrace{\neg(A \vee B)}^{H_1}$}
\RightLabel{$def\ \neg$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash (A \vee B) \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$H_2, H_1 \vdash \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_2]$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash A \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$def\ \neg$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash \neg A$}
\AxiomC{$\overbrace{B}^{H_3}$}
\RightLabel{$\vee_{i_2}$}
\UnaryInfC{$H_3 \vdash A \vee B$}
\AxiomC{$\overbrace{\neg(A \vee B)}^{H_1}$}
\RightLabel{$def\ \neg$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash (A \vee B) \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$H_3, H_1 \vdash \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_3]$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash B \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$def\ \neg$}
\UnaryInfC{$H_1 \vdash \neg B$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$H_1 \vdash \neg A \wedge \neg B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i [H_1]$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$}
\end{prooftree}
$$

2.5 pt

Q3. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

SOLUTION PROPOSÉE PAR LE PROUVEUR INF124

```
Démontrons (!(A \/ B) ==> (!A /\ !B)) :
Supposons !(A \/ B) (hypothèse [H1]) et montrons (!A /\ !B) :
{ Preuve de (!A /\ !B) :
  1. Démontrons !A, ce qui est équivalent à (A ==> _|_) d'après la définition de neg.
     Démontrons donc (A ==> _|_).
        Pour cela, supposons A (hypothèse [H2]) et montrons qu'on aboutit à une contradiction (_|_) :
          Pour cela, on va montrer d'une part (A \/ B) et d'autre part ((A \/ B) ==> _|_) :
          - démontrons (A \/ B)
               Pour montrer (A \/ B) inutile de montrer B,
               on se contente de montrer A en remarquant que c'est l'hypoth?se [H2].
          - démontrons ((A \/ B) ==> _|_) : c'est l'hypothèse [H1] d'après la définition de neg.
     Ceci achève la preuve de !A.

  2. Démontrons !B, ce qui est équivalent à (B ==> _|_) d'après la définition de neg.
     Démontrons (B ==> _|_).
        Pour cela, supposons B (hypothèse [H3]) et montrons qu'on aboutit à une contradiction (_|_) :
          Pour cela, on va montrer d'une part (A \/ B) et d'autre part ((A \/ B) ==> _|_) :
          - démontrons (A \/ B)
               Pour montrer (A \/ B) inutile de montrer A,
               on se contente de montrer B en remarquant que c'est l'hypoth?se [H3].
          - démontrons ((A \/ B) ==> _|_) : c'est l'hypothèse [H1] d'après la définition de neg.
     Ceci achève la preuve de !B.

}: on a ainsi montré (!A /\ !B)

Ceci achève la démonstration de (!(A \/ B) ==> (!A /\ !B))
```

4 pt

Q4. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\exists u, (\forall v, F(u, v))) \Rightarrow \big(\forall x, (\exists y, F(y, x))\big)$

SOLUTION PROPOSÉE PAR LE PROUVEUR INF124

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\exists x,(\forall y,R(x,y))}^{H_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall y,R(X_1,y)}^{H_2}}{H_2 \ \vdash\ R(X_1,U_1)}\,\forall_e(y:=U_1)}{H_2 \ \vdash\ \exists v,R(v,U_1)}\,\exists_i}{(\forall y,R(X_1,y))\Rightarrow(\exists v,R(v,U_1))}\,\Rightarrow_i [H_2]}{\forall x,(\forall y,R(x,y))\Rightarrow(\exists v,R(v,U_1))}\,\forall_i(X_1\notin\mathscr{H}\cup\mathscr{C})}{H_1 \ \vdash\ \exists v,R(v,U_1)}\,\exists_e}{H_1 \ \vdash\ \forall u,\exists v,R(v,u)}\,\forall_i(U_1\notin\mathscr{H}\cup\mathscr{C})}{(\exists x,(\forall y,R(x,y)))\Rightarrow(\forall u,\exists v,R(v,u))}\,\Rightarrow_i [H_1]$$

2.5 pt

Q5. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

SOLUTION PROPOSÉE PAR LE PROUVEUR INF124

```
Démontrons ((EX x, (QQ y, R(x,y))) ==> (QQ u, (EX v, R(v,u)))) :
Supposons (EX x, (QQ y, R(x,y))) (hypothèse [H1]) et montrons (QQ u, (EX v, R(v,u))) :
{ Preuve de (QQ u, (EX v, R(v,u))) :
  considérons un U1 quelconque et montrons (EX v, R(v,U1)) :
  Pour cela, exploitons l'hypothèse [H1] qui dit qu'il existe un x tel que (QQ y, R(x,y))
  Comme on ne connait pas explicitement le x qui satisfait la propriété,
  on va devoir montrer (EX v, R(v,U1)) pour tout x qui satisfait (QQ y, R(x,y)).

  Démontrons donc (QQ x, ((QQ y, R(x,y)) ==> (EX v, R(v,U1)))) :
     Considérons un X1 quelconque et montrons ((QQ y, R(X1,y)) ==> (EX v, R(v,U1))) :
```

```
     Pour cela, on suppose (QQ y, R(X1,y)) (hypothèse [H2]) et on montre (EX v, R(v,U1)) :
     { Preuve de (EX v, R(v,U1)) :
       il suffit de montrer la propriété R(v,U1) pour un v bien choisi ; prenons v := X1.
       R(X1,U1) est alors une instance particulière (pour y:=U1) de l'hypothèse [H2] : (QQ y, R(X1,y))
     }: on en conclu (EX v, R(v,U1))
}: on a ainsi montré (QQ u, (EX v, R(v,u)))

Ceci achève la démonstration de ((EX x, (QQ y, R(x,y))) ==> (QQ u, (EX v, R(v,u))))
```

10 pt

3 pt

Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles

Q6. Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1. $$\frac{a \in A \qquad A \subseteq B}{a \in B}$$
2. $$\frac{a \in A}{a \in A \cup B}$$
3. $$\frac{a \in A \cap B}{a \in A}$$

3 pt

Q7. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème $\big(X \cap (Y \cup X)\big) = X$

4 pt

Q8. On désigne l'ensemble vide par $\emptyset$. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème $\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \Longrightarrow \big((X \cap (Y \cup Z)\big) = (X \cap Z)\big)$

5 pt

Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type CAML

2.5 pt

Q9. Soit `feu` le type défini par :

```
type feu =
 | Vert
 | Orange
 | Rouge
 | Clignotant of feu
```

— Donnez quatre élements différents de type `feu` de manière à utiliser chacun des constructeurs.

SOLUTION

`Vert ; Orange ; Rouge ; Clignotant(Orange)`

— Complétez le schéma de récurrence associé au type `feu`.

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall f \in \texttt{feu},\ Q(f)}\ \textit{rec−feu}$$

2.5 pt

Q10. Soit `color` le type défini par :

```
type color =
  | R of int (* rouge *)
  | V of  int (* vert *)
  | B of int (* bleu *)
  | M of color * color (* mélange *)
```

— Donnez quatre élements différents du type `color` de manière à utiliser chacun des constructeurs.

SOLUTION

`B(0) ; R(256) ; V(128) ; M(B(128), R(128))`

— Complétez le schéma de récurrence associé au type `color`.

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall c \in \texttt{color},\ Q(c)}\ \textit{rec−color}$$

5 pt

Exercice 4 : Que dire de ces deux régles ?

On se dote d'une nouvelle règle correspondant au raisonnement par « contraposé » :

$$\dfrac{\neg A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow A}\,\textit{contraposé}$$

On se demande si cette règle est valide et ce que nous apporte par rapport aux règles que l'on a déjà.

2 pt

Q11. Utilisez la règle $\neg\neg_e$ pour démontrer la validité de la règle *contraposé*.

SOLUTION

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{H_3} \quad \overbrace{\neg A \Rightarrow B}^{H_1}}{H_3, H_1 \vdash B}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\overbrace{\neg B}^{H_2}}{H_2 \vdash B \Rightarrow \bot}\,\mathit{def}\,\neg}{H_1, H_3, H_2 \vdash \bot}\Rightarrow_e}{H_1, H_2 \vdash \neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow_i [H_3 : \neg A]}{H_1, H_2 \vdash A}\neg\neg_e}{H_1 \vdash \neg B \Rightarrow A}\Rightarrow_i [H_2 : \neg B]}{(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)}\Rightarrow_i [H_1 : \neg A \Rightarrow B]$$

2 pt

Q12. Démontrez la propositon $\neg\neg A \Rightarrow A$ en utilisant la règle *contraposé* avec un B bien choisi.

SOLUTION FOURNIE PAR LE PROUVEUR INF124

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg\neg A}^{H_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{H_2}}{\neg A \Rightarrow \neg A}\Rightarrow_i [H_2] \qquad \dfrac{}{(\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)}\,\textsc{ax}\,(\mathit{contrapose})}{\neg\neg A \Rightarrow A}\Rightarrow_e}{H_1 \vdash A}\Rightarrow_e}{\neg\neg A \Rightarrow A}\Rightarrow_i [H_1]$$

AUTRE SOLUTION FOURNIE PAR LE PROUVEUR INF124

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\bot}^{H_3}}{\bot \Rightarrow \bot}\Rightarrow_i [H_3 : \bot]}{\neg\bot}\,\mathit{def}\,\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{H_2} \quad \dfrac{\overbrace{\neg\neg A}^{H_1}}{H_1 \vdash \neg A \Rightarrow \bot}\,\mathit{def}\,\neg}{H_2, H_1 \vdash \bot}\Rightarrow_e}{H_2, H_1 \vdash A}\bot_e \qquad \dfrac{\overbrace{\neg A}^{H_2}}{H_2 \vdash A \Rightarrow \bot}\,\mathit{def}\,\neg}{H_1, H_2 \vdash \bot}\Rightarrow_e}{H_1 \vdash \neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow_i [H_2 : \neg A] \qquad \dfrac{}{(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\neg\bot \Rightarrow A)}\,\textsc{ax}\,(\mathit{contrapose})}{H_1 \vdash \neg\bot \Rightarrow A}\Rightarrow_e}{H_1 \vdash A}\Rightarrow_e}{\neg\neg A \Rightarrow A}\Rightarrow_i [H_1 : \neg\neg A]$$

1 pt

Q13. D'après les questions précédentes, que peut-on dire des règles $\neg\neg_e$ et *contraposé* ? **Justifiez votre réponse.**

SOLUTION

— *on a d'une part montré comment la conclusion de la règle* contraposé *s'obtient en utilisant la règle du* $\neg\neg_e$ *et les autres règles de la déduction naturelle.*

— *d'autre part on a démontré la conclusion de la règle* $\neg\neg_e$ *en utilisant la règle* contraposé *et les autres règles de la déduction naturelle.*

On a ainsi démontré que chaque règle est un conséquence de l'autre. Tout ce qu'on peut démontrer avec l'une peut donc se démontrer avec l'autre règle. Les deux règles sont équivalentes.

10 pt

Exercice 5 : Preuve par récurrence en déduction naturelle

On considère le type OCAML suivant

```
type nat =
 | Z
 | S of nat
```

1.5 pt

Q14. Rappelez le principe de récurrence associé au type `nat`.

$$\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall n \in \texttt{nat},\ P(n)}\ \textit{rec-nat}$$

Implantation d'un prédicat défini par des axiomes On considère le prédicat *pair* défini par les axiomes suivants :

$$\overbrace{pair(\mathrm{Z})}^{Ax_1} \qquad\qquad \overbrace{\forall p,\ pair(\mathrm{S}(p)) \Leftrightarrow \neg pair(p)}^{Ax_2}$$

1.5 pt

Q15. Écrire en CAML la fonction *pair* de type `nat` $\rightarrow$ `bool` qui correspond à ces axiomes.

SOLUTION

```
let rec (pair: nat -> bool) = fun n' ->
 match n' with
 | Z -> true
 | S(p) -> not (pair p)
;;
```

2 pt

Q16. Utilisez les axiomes qui définissent *pair* pour démontrer, pour un K fixé, la proposition suivante $\neg pair(\mathrm{S}(K)) \Longrightarrow pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))$

SOLUTION

$$ADP_1 = \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{\forall p,\ \neg pair(p) \Leftrightarrow pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(p)))}^{Ax_2}}{\neg pair(\mathrm{S}(K)) \Leftrightarrow pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))}\ \forall_e\ (p{=}\mathrm{S}(K))}{\neg pair(\mathrm{S}(K)) \Longrightarrow pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))\ \ \bigwedge\ \ pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K))) \Rightarrow \neg pair(\mathrm{S}(K))}\ def\ \Leftrightarrow}{\neg pair(\mathrm{S}(K)) \Longrightarrow pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(K)))}\ \wedge_{e_1} \right.$$

5 pt

Q17. Démontrez le théorème suivant $\forall n \in \texttt{nat},\ pair(n) \ \vee\ pair(\mathrm{S}(n))$ en utilisant les axiomes qui définissent *pair*, le principe de récurrence sur `nat` et l'arbre de preuve de la question précédente que vous nommerez ADP_1.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{pair(\mathrm{z})}^{Ax_1}
}{pair(\mathrm{z}) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(\mathrm{z})))}\;{\scriptstyle \vee_{i1}}
}{P(\mathrm{z})}\;{\scriptstyle def\ P}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{pair(K)}^{H_1}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{pair(\mathrm{s}(K))}^{H_3}
\quad
\overbrace{pair(\mathrm{s}(K)) \Longrightarrow \neg pair(K)}^{ADP_2}
}{\neg pair(K)}\;{\scriptstyle \Rightarrow_e}
}{pair(K) \Rightarrow \bot}\;{\scriptstyle def\ \neg}
}{\bot}\;{\scriptstyle \Rightarrow_e}
}{pair(\mathrm{s}(K)) \Rightarrow \bot}\;{\scriptstyle \Rightarrow_i\ [H_3 : pair(\mathrm{S}(K))]}
}{\neg pair(\mathrm{s}(K))}\;{\scriptstyle def\ \neg}
\quad
\overbrace{\neg pair(\mathrm{s}(K)) \Rightarrow pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(K)))}^{ADP_1}
}{pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(K)))}\;{\scriptstyle \Rightarrow_e}
}{pair(\mathrm{s}(K)) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(K)))}\;{\scriptstyle \vee_{i1}}
\quad
\dfrac{\overbrace{P(K)}^{[Hr]}}{pair(K) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(K)))}\;{\scriptstyle def\ P}
\quad
\dfrac{\overbrace{pair(\mathrm{s}(K))}^{[H_2]}}{pair(\mathrm{s}(K)) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(K)))}\;{\scriptstyle \vee_{i2}}
}{pair(\mathrm{s}(K)) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(K)))}\;{\scriptstyle \vee_e\ [H_1, H_2]}
}{P(\mathrm{s}(K))}\;{\scriptstyle def\ P}
}{P(K) \Rightarrow P(\mathrm{s}(K))}\;{\scriptstyle \Rightarrow_i\ [Hr : P(K)]}
}{\forall k,\; P(k) \Rightarrow P(\mathrm{s}(k))}\;{\scriptstyle \forall_i\ K \notin \mathcal{H}, K \notin C}
}{\forall n \in \texttt{nat},\; pair(n) \;\vee\; pair(\mathrm{s}(n))}\;{\scriptstyle rec-nat\ avec\ P(n) \stackrel{def}{=} pair(n)\, \vee\, pair(\mathrm{S}(n)))}
$$

$$
\text{où } ADP_2 = \left\{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\overbrace{\forall p,\; \neg pair(p) \Leftrightarrow pair(\mathrm{s}(\mathrm{s}(p)))}^{Ax_2}}{\neg pair(K) \Leftrightarrow pair(\mathrm{s}(K))}\;{\scriptstyle \forall_e\ (p=K)}
}{\neg pair(K) \Rightarrow pair(\mathrm{s}(K)) \quad \bigwedge \quad pair(\mathrm{s}(K)) \Longrightarrow \neg pair(K)}\;{\scriptstyle def\ \Leftrightarrow}
}{pair(\mathrm{s}(K)) \Longrightarrow \neg pair(K)}\;{\scriptstyle \wedge_{e_2}}
\right.
$$