Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français (23 pt)

Q1. (4 pt) Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

Q2. (2 pt) Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

Q3. (3 pt) Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

Q4. (4 pt) Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

Q5. (2 pt) Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

Q6. (4 pt) La relation $R(x, q)$ représente le fait que « x connaît la réponse à la question q ». La relation $E(q, x)$ modélise le fait que « q est une énigme pour x ». Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème

Q7. (4 pt) Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème suivant :

Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles (10 pt)

Q8. (4 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1. $$\frac{a \in A \quad A \subseteq B}{a \in B}$$
2. $$\frac{a \in A}{a \in A \cup B}$$
3. $$\frac{a \in A \cap B}{a \in A}$$

Q9. (2 pt) Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème

Q10. (4 pt) On désigne l'ensemble vide par $\emptyset$. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème

Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type OCAML (6 pt)

Q11. (2 pt) Soit `expr` un type défini par :

```
type expr =
  | I of int
  | Op of expr
  | Plus of expr * expr
```

- Donnez trois élements différents de type `expr`.
- Complétez le schéma de récurrence associé au type `expr`.

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\forall e \in \texttt{expr},\ Q(e)}\ \textit{rec-expr}$$

Q12. (2 pt) Soit `desc` un type défini par :

```
type desc =
  | P
  | C
  | F of desc
```

- Donnez trois élements différents de type `desc`.
- Complétez le schéma de récurrence associé au type `desc`.

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall d \in \texttt{desc},\ Q(d)}\ \mathit{rec{-}desc}$$

Q13. (2 pt) Donnez le schéma de récurrence associé au type `a3int` défini par :

```
type a3int =
 | AVIDE
 | AB of int * a3int * a3int * a3int
```

Exercice 4 : Preuve par récurrence en déduction naturelle (21 pt)

On considère le type OCAML suivant

```
type zint =
 | Z
 | S of zint
 | P of zint
```

On rappele le schéma de récurrence associé au type `zint`

$$\frac{Q(\mathrm{Z}) \quad \forall i,\ Q(i) \Rightarrow Q(\mathrm{S}(i)) \quad \forall i,\ Q(i) \Rightarrow Q(\mathrm{P}(i))}{\forall i \in \texttt{zint},\ Q(i)}\ \mathit{rec{-}zint}$$

Implantation de fonctions définies par des axiomes On considère la fonction *neg* définie par les axiomes suivants :

Ax_1 : $neg(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$
Ax_2 : $\forall i,\ neg(\mathrm{S}(i)) = \mathrm{P}(neg(i))$
Ax_3 : $\forall i,\ neg(\mathrm{P}(i)) = \mathrm{S}(neg(i))$

Q14. (2 pt) Écrire en OCAML la fonction *neg* de type `zint` $\rightarrow$ `zint` qui correspond à ces axiomes. On considère deux fonctions *nbP* et *nbS* qui comptent le nombre de S, respectivement le nombre de P, dans un élement $i \in$ `zint`. Les fonctions sont définies par les axiomes suivants :

Ax_4 :	$nbP(\mathrm{Z}) = 0$		Ax_7 :	$nbS(\mathrm{Z}) = 0$
Ax_5 :	$\forall i,\ nbP(\mathrm{S}(i)) = nbP(i)$	*et*	Ax_8 :	$\forall i,\ nbS(\mathrm{S}(i)) = 1 + nbS(i)$
Ax_6 :	$\forall i,\ nbP(\mathrm{P}(i)) = 1 + nbP(i)$		Ax_9 :	$\forall i,\ nbS(\mathrm{P}(i)) = nbS(i)$

Q15. (3 pt) Écrire en OCAML les fonctions *nbP* et *nbS* de type `zint` $\rightarrow$ `nat` qui correspondent à ces axiomes.

Q16. (6 pt) Utilisez les axiomes qui définissent *neg* et le principe de récurrence sur `zint` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

Thm_1 : $\forall i \in$ `zint`, $neg(neg(i)) = i$

Q17. (6 pt) Utilisez les axiomes qui définissent nbP et nbS et le principe de récurrence sur `zint` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

$Thm_2 :\ \ \forall i \in \texttt{zint},\ nbP(neg(i)) = nbS(i)$

Q18. (4 pt) En réutilisant les théorèmes Thm_1 et Thm_2, démontrez (sans récurrence) le théorème suivant : $\forall i \in \texttt{zint},\ nbS(neg(i)) = nbP(i)$