Numéro d'anonymat : ....

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 7 exercices indépendants
- Le sujet est sur 64 mais il suffit d'avoir 30 pour avoir la moyenne.
- Répondez sur le sujet

Exercice 1 : Preuve par récurrence en déduction naturelle (10 pt)

On considère le type OCAML suivant

```
type nat =
 | Z
 | S of nat
```

Q1. (1.5 pt) Rappelez le principe de récurrence associé au type `nat`.

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\forall n \in \texttt{nat},\ P(n)}\ \textit{rec-nat}$$

Implantation d'un prédicat défini par des axiomes On considère le prédicat *pair* défini par les axiomes suivants :

Ax_1 : $pair(\mathrm{Z})$
Ax_2 : $\neg pair(\mathrm{S}(\mathrm{Z}))$
Ax_3 : $\forall n,\ pair(\mathrm{S}(\mathrm{S}(n))) \Longleftarrow pair(n)$

Q2. (1.5 pt) Écrire en OCAML la fonction *pair* de type `nat` $\rightarrow$ `bool` qui correspond à ces axiomes.

Q3. (7 pt) Utilisez les axiomes qui définissent *pair* et le principe de récurrence sur `nat` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant : $\forall n \in \texttt{nat},\ pair(n) \ \vee\ pair(\mathrm{S}(n))$

$$\forall n \in \texttt{nat},\ pair(n) \ \vee\ pair(\mathrm{S}(n))$$

Exercice 2 : Arbre de preuve et traduction en français (10 pt)

Q4. (2 pt) Démontrez sous forme d'arbre de preuve en déduction naturelle le théorème suivant

$$\frac{}{\big(A \Rightarrow C \ \land \ B \Rightarrow C\big) \Longrightarrow \big((A \ \lor \ B) \Rightarrow C\big)}$$

Q5. (2 pt) Donnez la traduction en français de cette preuve.

Q6. (3 pt) Démontrez sous forme d'arbre de preuve en déduction naturelle le théorème suivant

$$\frac{}{\big(\forall x,\, \forall y,\;\; F(x) \vee \;\big(G(y) \Rightarrow F(x)\big)\big) \Longrightarrow (\forall z, G(z) \Rightarrow F(z))}$$

Q7. (3 pt) Donnez la traduction en français de cette preuve.

Exercice 3 : Preuve par récurrence en déduction naturelle (10 pt)

On considère le type OCAML des `asn` (arbres sans nœud) définis de la manière suivante :

```
type asn =
 | F of int
 | C of asn * asn
```

Ce type comporte deux cas : soit un `asn` est une feuille qui porte un entier, soit c'est la concaténation de deux `asn`. Puisque ces arbres n'ont pas de nœuds, on ne s'intéresse qu'à leurs feuilles. Les feuilles de l'arbre, parcourues de gauche à droite, forment une liste d'entiers.

Exemple : Les feuilles de l'arbre $\text{C}(\text{C}(\text{F}\,1, \text{F}\,2), \text{C}(\text{F}\,3, \text{F}\,4))$ correspondent à la liste d'entiers $([1] @ [2]) @ ([3] @ [4])$ c'est-à-dire $[1; 2; 3; 4]$

Q8. (1.5 pt) À l'aide de l'opérateur (@), écrire en OCAML la fonction *avl* de type `asn` → `int list` qui transforme un arbre sans nœud en la liste des entiers portés par les feuilles de l'arbre.

Q9. (1.5 pt) Écrire en OCAML une fonction *rev* de type `asn` → `asn`, définie par les axiomes suivants :

Ax_1 : $rev\ \text{F}\,(n) = \text{F}\,(n)$

Ax_2 : $rev\ \text{C}(x, y) = \text{C}(rev\ y, rev\ x)$

Q10. (1 pt) Expliquez en une phrase ce que fait la fonction *rev*

Preuve par récurrence sur le type `asn` Le principe de récurrence associé au type `asn` est le suivant :

$$\frac{\forall i,\ P(\textsc{f}\,(i)) \qquad \forall a_1,\ \forall a_2,\ P(a_1)\ \wedge\ P(a_2) \Rightarrow P(\textsc{c}(a_1, a_2))}{\forall a \in \texttt{asn},\ P(a)}\ {\scriptstyle rec-\texttt{asn}}$$

Q11. (6 pt) Utilisez les axiomes qui définissent la fonction *rev* et le principe de récurrence associé au type `asn` pour démontrer le théorème suivant : $\forall a \in \texttt{asn},\ rev\ (rev\ (a)) = a$

$\forall a \in \texttt{asn},\ rev\ (rev\ (a)) = a$

Exercice 4 : Preuves en déduction naturelle (10 pt)

Q12. (3 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle le théorème suivant :

$$\overline{\big(\forall x,\ P(x)\ \wedge\ Q(x)\big) \Longrightarrow \big(\exists y,\ P(y)\big)}$$

Q13. (4 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle le théorème suivant :

$$\overline{\big(\exists x,\ \forall y,\ R(x,y)\big) \Longrightarrow \big(\forall u,\ \exists v,\ R(v,u)\big)}$$

Q14. (3 pt) Utilisez la règle du tiers-exclu pour démontrer le théorème suivant :

$$\frac{}{\big(A \Rightarrow B\big) \ \vee \ \big((\neg A) \Rightarrow B\big)}$$

Exercice 5 : Preuve de propriétés des ensembles (10 pt)

Q15. (2 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que la règle de déduction suivante est correcte :

$$\frac{a \in A \qquad A \subseteq B}{a \in B}$$

Q16. (4 pt) Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème suivant :

$$\overline{\big((A \cup B) \subseteq (A \cap B)\big) \Longrightarrow (A \subseteq B)}$$

Q17. (4 pt) On désigne l'ensemble vide par $\emptyset$. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème suivant :

$$\overline{\big((A \cup B) \subseteq \emptyset\big) \Longrightarrow A = \emptyset}$$

Exercice 6 : Schéma de récurrence associé à un type OCAML (6 pt)

Q18. (2 pt) Donnez le schéma de récurrence associé au type `abint` défini par :

```
type abint =
 | Avide
 | Ab of abint * int * abint
```

Q19. (2 pt) Complétez le schéma de récurrence associé au type `pos` défini par :

```
type pos =
  | U
  | O of pos
  | E of pos
```

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall p \in \texttt{pos},\ Q(p)}\ \textit{rec-pos}$$

Q20. (2 pt) Complétez le schéma de récurrence associé au type `machin` défini par :

```
type machin =
  | A
  | B of bool
  | C of int
```

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall m \in \texttt{machin},\ P(m)}\ \textit{rec-machin}$$

Exercice 7 : Équivalence entre deux régles (6 pt)

Le but de cet exercice est de démontrez que les règle du tiers-exclu est de l'élimation de la double négation sont équivalentes.

Q21. (2 pt) Expliquez comment on doit procéder pour démontrer une telle chose ?

Q22. (4 pt) Faîtes la preuve que la régle du $\frac{1}{3}ex$ est une conséquence de la règle $\neg\neg E$.