

Exercice 1 : Preuve par récurrence en déduction naturelle (10 pt)

On considère le type OCAML suivant

```
type nat =  
  | z  
  | s of nat
```

Q1. (1.5 pt) Rappelez le principe de récurrence associé au type `nat`.

$$\frac{\dots\dots\dots}{\forall n \in \mathbf{nat}, P(n)} \text{ rec-nat}$$

Implantation d'un prédicat défini par des axiomes On considère le prédicat *pair* défini par les axiomes suivants :

$Ax_1 : \text{pair}(z)$
 $Ax_2 : \neg \text{pair}(s(z))$
 $Ax_3 : \forall n, \text{pair}(s(s(n))) \iff \text{pair}(n)$

Q2. (1.5 pt) Écrire en OCAML la fonction *pair* de type `nat` \rightarrow `bool` qui correspond à ces axiomes.

Q3. (7 pt) Utilisez les axiomes qui définissent *pair* et le principe de récurrence sur `nat` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant : $\forall n \in \mathbf{nat}, \text{pair}(n) \vee \text{pair}(s(n))$

Exercice 2 : Arbre de preuve et traduction en français (10 pt)

Q4. (2 pt) Démontrez sous forme d'arbre de preuve en déduction naturelle le théorème suivant

$$(A \Rightarrow C \wedge B \Rightarrow C) \Longrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$$

Q5. (2 pt) Donnez la traduction en français de cette preuve.

Q6. (3 pt) Démontrez sous forme d'arbre de preuve en déduction naturelle le théorème suivant

$$(\forall x, \forall y, F(x) \vee (G(y) \Rightarrow F(x))) \Longrightarrow (\forall z, G(z) \Rightarrow F(z))$$

Q7. (3 pt) Donnez la traduction en français de cette preuve.

Exercice 3 : Preuve par récurrence en déduction naturelle (10 pt)

On considère le type OCAML des `asn` (arbres sans nœud) définis de la manière suivante :

```
type asn =  
  | F of int  
  | C of asn * asn
```

Ce type comporte deux cas : soit un `asn` est une feuille qui porte un entier, soit c'est la concaténation de deux `asn`. Puisque ces arbres n'ont pas de nœuds, on ne s'intéresse qu'à leurs feuilles. Les feuilles de l'arbre, parcourues de gauche à droite, forment une liste d'entiers.

Exemple : Les feuilles de l'arbre $C(C(F\ 1, F\ 2), C(F\ 3, F\ 4))$ correspondent à la liste d'entiers $([1] @ [2]) @ ([3] @ [4])$ c'est-à-dire $[1; 2; 3; 4]$

Q8. (1.5 pt) À l'aide de l'opérateur $(@)$, écrire en OCAML la fonction `avl` de type `asn → int list` qui transforme un arbre sans nœud en la liste des entiers portés par les feuilles de l'arbre.

Q9. (1.5 pt) Écrire en OCAML une fonction `rev` de type `asn → asn`, définie par les axiomes suivants :

$Ax_1 : rev\ F\ (n) = F\ (n)$
 $Ax_2 : rev\ C(x, y) = C(rev\ y, rev\ x)$

Q10. (1 pt) Expliquez en une phrase ce que fait la fonction `rev`

Preuve par récurrence sur le type `asn` Le principe de récurrence associé au type `asn` est le suivant :

$$\frac{\forall i, P(F\ (i)) \quad \forall a_1, \forall a_2, P(a_1) \wedge P(a_2) \Rightarrow P(C(a_1, a_2))}{\forall a \in \text{asn}, P(a)} \text{rec-asn}$$

Q11. (6 pt) Utilisez les axiomes qui définissent la fonction `rev` et le principe de récurrence associé au type `asn` pour démontrer le théorème suivant : $\forall a \in \text{asn}, rev\ (rev\ (a)) = a$

Exercice 4 : Preuves en déduction naturelle (10 pt)

Q12. (3 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle le théorème suivant :

$$(\forall x, P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow (\exists y, P(y))$$

Q13. (4 pt) Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle le théorème suivant :

$$(\exists x, \forall y, R(x, y)) \Longrightarrow (\forall u, \exists v, R(v, u))$$

Q14. (3 pt) Utilisez la règle du tiers-exclu pour démontrer le théorème suivant :

$$(A \Rightarrow B) \vee ((\neg A) \Rightarrow B)$$

Exercice 5 : Preuve de propriétés des ensembles (10 pt)

Q15. (2 pt) Démontrer à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que la règle de déduction suivante est correcte :

$$\frac{a \in A \quad A \subseteq B}{a \in B}$$

Q16. (4 pt) Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème suivant :

$$((A \cup B) \subseteq (A \cap B)) \implies (A \subseteq B)$$

Q17. (4 pt) On désigne l'ensemble vide par \emptyset . Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème suivant :

$$((A \cup B) \subseteq \emptyset) \implies A = \emptyset$$

Exercice 6 : Schéma de récurrence associé à un type OCAML (6 pt)

Q18. (2 pt) Donnez le schéma de récurrence associé au type `abint` défini par :

```
type abint =  
  | AVIDE  
  | AB of abint * int * abint
```

Q19. (2 pt) Complétez le schéma de récurrence associé au type `pos` défini par :

```
type pos =  
  | U  
  | O of pos  
  | E of pos
```

.....

 $\forall p \in \text{pos}, Q(p)$

rec-pos

Q20. (2 pt) Complétez le schéma de récurrence associé au type `machin` défini par :

```
type machin =  
  | A  
  | B of bool  
  | C of int
```

.....

 $\forall m \in \text{machin}, P(m)$

rec-machin

Exercice 7 : Équivalence entre deux règles (10 pt)

Le but de cet exercice est de démontrer que les règles du tiers-exclu et de l'élimination de la double négation sont équivalentes.

- Q21.** (2 pt) Expliquez comment on doit procéder pour démontrer une telle chose ?
- Q22.** (4 pt) Faites la preuve que la règle du $\frac{1}{3}ex$ est une conséquence de la règle $\neg\neg E$.
- Q23.** (4 pt) Faites la preuve réciproque.