NOM .... Prénom .... Groupe ...

ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT .... si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 6 exercices indépendants
- Le sujet est sur 60 mais il suffit d'avoir 25 pour avoir la moyenne.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

5 pt

Exercice 1 : Question de cours (5 min)

Q1. Complétez les pointillés

On considère deux relations $R \subseteq A \times A$ et $S \subseteq A \times B$.

Donnez sous forme logique les définitions de :

1. R est transitive *si et seulement si*

   $\forall$ ....

2. R est anti-symétrique *si et seulement si*

   $\forall$ ....

3. $R \circ R$ est réflexive *si et seulement si*

   $\forall$ ....

4. $x \; S \circ R \; z$ *si et seulement si*

   ....

5. $S \circ R = \{ (x, z) \mid$ .... $\}$

10 pt

Exercice 2 : Composition de relations (25 min)

On considère deux ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c\}$ et deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times B$ définies par

$R = \{ (1, a), (2, a), (3, c), (4, b) \}$ et $S =$

S	a	b	c
a	V	F	V
b	V	F	V
c	V	F	V

1 pt

Q2. Dessinez la relation R sous la forme d'un diagramme $A \to B$

2.5 pt

Q3. Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse

1. R est une fonction ? ....

   ....

2. R est injective ? ....

   ....

3. R est surjective ? ....

   ....

4. R est bijective ? ....

1 pt

Q4. Dessinez la relation S sous la forme d'un graphe (c'est-à-dire sous la forme d'arcs entre les points ⓐ, ⓑ, ⓒ)

2.5 pt

Q5. Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse

1. S est reflexive ? ....

2. S est symétrique ? ....

3. S est anti-symétrique ? ....

   ....

4. S est transitive ? ....

   ....

1 pt

Q6. Dessinez la relation S sous la forme d'un diagramme $B \to B$

2 pt

Q7. Dessinez la composition $S \circ R$ sous la forme d'un graphe

10 pt

Exercice 3 : Fonction totale et transitive (20 min)

Rappel de définitions 1

– *Une relation $R \subseteq A \times B$ est une fonction si et seulement si*

$$\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B, \ \ x \ R \ y_1 \ \wedge \ x \ R \ y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

– *Une relation* $R \subseteq A \times B$ *est totale si et seulement si* $\forall a \in A. \ \exists b \in B. \ a \ R \ b$

2 pt

Q8. Dessinez sous la forme d'un graphe, une **fonction** totale et réflexive $F : A \to A$ où $A = \{a, b, c\}$.

2 pt

Q9. Démontrez qu'il existe une unique **fonction** totale et réflexive

4 pt

Q10. Démontrez qu'une **relation** totale, symétrique et transitive est forcément réflexive.

2 pt

Q11. En déduire qu'il existe une unique **fonction** totale, symétrique et transitive.

15 pt

Exercice 4 : Relation inverse, fonction injective et programmation sur relations (30 min)

Rappel de définitions 2

– *Une relation* $R \subseteq A \times B$ *est l'inverse de la relation* $S \subseteq B \times A$*, notée* $S = R^{-1}$ *si et seulement si*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \ \ x \ R \ y \Leftrightarrow y \ S \ x.$$

– *Une relation* $R \subseteq A \times B$ *est injective si et seulement si*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall y \in B, \ \ x_1 \ R \ y \ \wedge \ \ x_2 \ R \ y \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3 pt

Q12. **Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse.** Si $R^{-1} \subseteq B \times A$ est une **fonction**, alors la relation $R \subseteq A \times B$ est **forcément** :

– une fonction
– injective
– surjective

2 pt

Q13. Écrire en C un prédicat `est_fonction` qui prend en paramètre une relation $R \subseteq A \times B$ et indique si la relation R est une fonction.

```
bool est_fonction(int A, int B, bool R[A][B])
```

2 pt

Q14. Écrire en C une fonction `construit_inv` qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui construit dans S la relation inverse R^{-1} de R.

```
void construit_inv(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A])
```

4 pt

Q15. Écrire en C un prédicat `est_fonction_injective` qui prend en paramètre une relation $R \subseteq A \times B$ et indique si la relation R est une fonction injective.

```
bool est_fonction_injective(int A, int B, bool R[A][B])
```

4 pt

Q16. Écrire en C un prédicat `test` qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui teste si les deux relations R et S vérifient la propriété

$$\forall x \in A, ((\exists y \in B, x \ R \ y) \Rightarrow (\exists z \in B, z \ S \ x))$$

```
bool test(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A])
```

10 pt

Exercice 5 : Relation d'équivalence et ensemble quotient (25 min)

On considère la relation R sur $\mathbb{N}$ définie par $x\ R\ y$ *si et seulement si* $x \div 10 = y \div 10$

Exemples :

- $40\ R\ 49$ puisque $40 \div 10 = 4 = 49 \div 10$
- $\neg(49\ R\ 50)$ puisque $49 \div 10 = 4 \neq 5 = 50 \div 10$

1 pt

Q17. Répondre par vrai ou faux

(a) $0\ R\ 5$: .... (c) $5\ R\ 50$: ....

(b) $5\ R\ 5$: .... (d) $50\ R\ 10$: ....

1.5 pt

Q18. Complétez le tableau de la relation R avec des V lorsque c'est nécessaire. Vous ne mettrez pas les F, on supposera qu'une case non remplie correspond à F.

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0																					
1																					
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					
13																					
14																					
15																					
16																					
17																					
18																					
19																					
20																					

1.5 pt

Q19. Démontrez que la relation R est une relation réflexive.

1 pt

Q20. Que faut-il démontrer pour prouver que la relation R est une relation transitive ?

1 pt

Q21. Que faut-il démontrer encore pour prouver que la relation R est une relation d'équivalence ?

Réponse : Il faudrait montrer que ....

c'est-à-dire $\forall$..

1 pt

Q22. **Complétez les pointillés**

On admet que R est une relation d'équivalence.
Rappel : la classe d'équivalence $C\ell(x)$ d'un entier x est définie par $C\ell(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid x \; R \; y\}$

Donnez la classe d'équivalence de chacun des entiers 0, 5, 10, 111 :

$C\ell(0)$ = ...

$C\ell(5)$ = ...

$C\ell(10)$ = ...

$C\ell(111)$ = ...

1 pt

Q23. **Complétez les pointillés**

Rappel : On construit l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ en ne conservant que le plus petit élément de chaque classe d'équivalence.

Donnez l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ jusqu'à 50 : ....

1 pt

Q24. Complétez le tableau de la relation R sur l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ jusqu'à 50.

R	0	.....	.....	.....	.....	.....
0	....					
.....						
.....						
.....						
.....						
.....						

1 pt

Q25. En déduire à quelle relation correspond la relation R sur $\mathbb{N}_{/R}$?

Réponse : ....

....

Exercice 6 : Analyse d'une relation

$10\,pt$

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{\,(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (a-2) \times (b-1) \leq 1\}$$

$1\,pt$ **Q26.** Parmi les couples suivantes, lesquelles appartiennent à la relation R ?
$(0,0)$, $(0,10)$, $(10,0)$, $(1,7)$, $(7,1)$, $(5,2)$, $(2,5)$?

$1\,pt$ **Q27.** Proposez un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in \mathbb{N}$, $(n, a) \in R \ \wedge \ (a, n) \in R$.

$3\,pt$ **Q28.** Pour chacune des propriétés (a, b, c, d), indiquez si la relation R satisfait la propriété et **justifiez votre réponse.**

(a) R reflexive

(b) R symétrique

(c) R transitive

(d) R anti-symétrique

$2\,pt$ **Q29.** Donnez et simplifiez la relation $R \circ R$ sous la forme d'un ensemble de couples.

$1\,pt$ **Q30.** En déduire que $R \circ (R \circ R) = R \circ R$.

$2\,pt$ **Q31.** On définit $R^2 = R \circ R$, et par récurrence $R^{k+1} = R \circ R^k$. En utilisant la question précedente, montrez par induction que $\forall k \in \mathbb{N}$, $R^k = R \circ R$.