Nom .... Prénom .... Groupe ...

ou Numéro d'étudiant .... si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 6 exercices indépendants
- Le sujet est sur 60 mais il suffit d'avoir 25 pour avoir la moyenne.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

Exercice 1 : Question de cours (5 pt)

Q1. Complétez les pointillés

On considère deux relations $R \subseteq A \times A$ et $S \subseteq A \times B$.

Donnez sous forme logique les définitions de :

1. R est transitive *si et seulement si*

   $\forall x, y, z \in A.\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
2. R est anti-symétrique *si et seulement si*

   $\forall x, y \in A.\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x \Rightarrow x = y$
3. $R \circ R$ est réflexive *si et seulement si*

   $\forall x \in A.\ x\ R \circ R\ x$
4. $x\ S \circ R\ z$ *si et seulement si*

   $\exists y \in A.\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ S\ z$
5. $S \circ R = \{ (x, z) \mid \exists y \in A.\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ S\ z \}$

Exercice 2 : Composition de relations (10 pt)

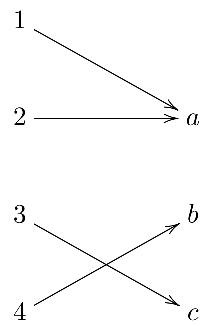
On considère deux ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c\}$ et deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times B$ définies par

$R = \{ (1, a), (2, a), (3, c), (4, b) \}$ et $S =$

S	a	b	c
a	V	F	V
b	V	F	V
c	V	F	V

Q2. (1 pt) Dessinez la relation R sous la forme d'un diagramme $A \to B$

SOLUTION

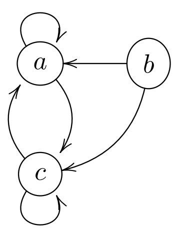


Q3. (2.5 pt) **Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse**

1. R est une fonction ? oui car chaque élément de A a au plus une image par R.
2. R est injective ? non car 1 et 2 ont la même image a par R
3. R est surjective ? oui car chaque élément de B a un antécédent par R.
4. R est bijective ? non car R n'est pas injective.

Q4. (1 pt) Dessinez la relation S sous la forme d'un graphe (c'est-à-dire sous la forme d'arcs entre les points ⓐ, ⓑ, ⓒ)

SOLUTION



Q5. (2.5 pt) **Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse**

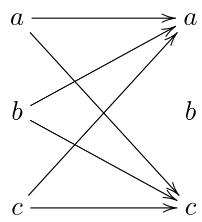
1. S est reflexive ? non car $S[b][b] = F$
2. S est symétrique ? non car $S[b][c] = V$ mais $S[c][b] = F$
3. S est anti-symétrique ? non car $a\ S\ c$ et $c\ S\ a$ donc il faudrait que a et c soient confondus
4. S est transitive ? oui car pour chaque x, y, z tel que $x\ S\ y\ \wedge\ y\ S\ z$ on a bien $x\ S\ z$

EN EFFET

$a\ S\ b\ \wedge\ b\ S\ c$ et on a bien $a\ S\ c$
$c\ S\ a\ \wedge\ b\ S\ a$ et on a bien $c\ S\ a$
$c\ S\ a\ \wedge\ a\ S\ c$ et on a bien $c\ S\ c$
$a\ S\ c\ \wedge\ c\ S\ a$ et on a bien $a\ S\ a$

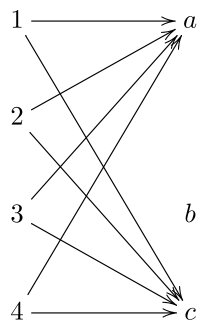
Q6. (1 pt) Dessinez la relation S sous la forme d'un diagramme $B \to B$

SOLUTION



Q7. (2 pt) Dessinez la composition $S \circ R$ sous la forme d'un graphe

SOLUTION



Exercice 3 : Fonction totale et transitive (10 pt)

Rappel de définitions 1

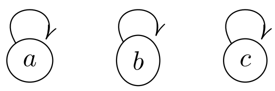
– *Une relation* $R \subseteq A \times B$ *est une fonction si et seulement si*

$$\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B,\ \ x\ R\ y_1\ \wedge\ x\ R\ y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

– *Une relation* $R \subseteq A \times B$ *est totale si et seulement si* $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ a\ R\ b$

Q8. (2 pt) Dessinez sous la forme d'un graphe, une **fonction** totale et réflexive $F : A \to A$ où $A = \{a, b, c\}$.

SOLUTION



Q9. (2 pt) Démontrez qu'il existe une unique **fonction** totale et réflexive

O.D.M. EST L'ABBRÉVIATION DE « ON DOIT MONTRER »

Soient $F, F' : A \to A$ deux fonctions
- *totales c'est-à-dire* $\forall a \in A,\ \exists a' \in A,\ F(a) = a'$ et $\forall a \in A,\ \exists a'' \in A,\ F'(a) = a''$ et
- *réflexive c'est-à-dire* $\forall a \in A,\ F(a) = a$ et $\forall a \in A,\ F'(a) = a$ et

ON DOIT MONTER $F \stackrel{?}{=} F'$ *c'est-à-dire*
O.D.M. $\forall a \in A,\ F(a) = F'(a)$

Preuve : F est totale donc $F(a)$ existe pour tout $a \in A$.
Que vaut $F(a)$?
F est réflexive donc $\forall a \in A,\ a\ F\ a$ (avec la notation relation)
autement dit $\forall a \in A,\ F(a) = a$ (avec la notation fonction)
De la même manière on montre que $\forall a \in A,\ F'(a) = a$.
Conclusion : $\forall a \in A,\ F(a) = a\ \wedge\ F'(a) = a$ et donc $\forall a \in A,\ F(a) = F'(a)$ □

Q10. (4 pt) Démontrez qu'une **relation** totale, symétrique et transitive est forcément réflexive.

SOLUTION

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation totale, symétrique, transitive.
ON DOIT MONTER *que R est réflexive, c'est-à-dire*
O.D.M. $\forall a \in A,\ a\ R\ a$

Preuve : Puisque R est totale, $\forall a \in A,\ \exists a' \in A,\ a\ R\ a'$
Puisque R est symétrique, si $a\ R\ a'$ alors $a'\ R\ a$
Puisque R est transitive, si $a\ R\ a'$ et $a'\ R\ a$ alors $a\ R\ a$. C.Q.F.D. □

Q11. (2 pt) En déduire qu'il existe une unique **fonction** totale, symétrique et transitive.

SOLUTION

Soit $F : A \to A$ une fonction totale, symétrique et transitive
ON DOIT MONTER *$F : A \to A$ est unique.*

Preuve : Si F est totale, symétrique et transitive alors, *d'après Q10*, F est réflexive.
On peut utiliser le théorème de la question *Q10* puisqu'une fonction est (un cas particulier de) relation.
donc F est totale et réflexive, mais alors, *d'après Q9*, F est unique (c'est la fonction identité). C.Q.F.D.
□

Exercice 4 : Relation inverse, fonction injective et programmation sur relations (15 pt)

Rappel de définitions 2

- *Une relation $R \subseteq A \times B$ est l'inverse de la relation $S \subseteq B \times A$, notée $S = R^{-1}$ si et seulement si*

$$\forall x \in A, \forall y \in B,\ \ x\ R\ y \Leftrightarrow y\ S\ x.$$

- *Une relation $R \subseteq A \times B$ est injective si et seulement si*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall y \in B,\ \ x_1\ R\ y\ \wedge\ \ x_2\ R\ y \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Q12. (3 pt) **Répondez par vrai ou faux et justifiez votre réponse.** Si $R^{-1} \subseteq B \times A$ est une **fonction**, alors la relation $R \subseteq A \times B$ est **forcément** :

– une fonction

SOLUTION

Faux pour $A = \{a\}, B = \{0, 1\}, R^{-1} = \{(0, a), (1, a)\}, R = \{(a, 0), (a, 1)\}$.
En effet, R^{-1} *est une fonction , et pourtant,* R *n'est pas une fonction.*

– injective

SOLUTION

Vrai car
$R^{-1} \subseteq B \times A$ *est une fonction*
si et seulement si
$\forall y \in B, \forall x_1, x_2 \in A,\ \ y\ R^{-1}\ x_1\ \wedge\ y\ R^{-1}\ x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$
si et seulement si
$\forall x_1, x_2 \in A, \forall y \in B,\ \ x_1\ R\ y\ \wedge\ x_2\ R\ y \Longrightarrow x_1 = x_2$
si et seulement si
$R \subseteq A \times B$ *est une relation injective.*

– surjective

SOLUTION

Faux pour $A = \{a\}, B = \{0, 1\}, R^{-1} = \{(0, a)\}, R = \{(a, 0)\}$.
En effet, R^{-1} *est une fonction , et pourtant,* R *n'est pas une surjective.*

Q13. (2 pt) Écrire en C un prédicat `est_fonction` qui prend en paramètre une relation $R \subseteq A \times B$ et indique si la relation R est une fonction.

```
bool est_fonction(int A, int B, bool R[A][B])
```

SOLUTION

```
bool est_fonction(int A, int B, bool R[A][B]){
  int a,b, ant;
  for(b=0 ; b<B ; b++){
    ant=0;
    for(a=0 ; a<A ; a++){
     if (R[a][b]){ ant++;}
     if (ant>1){ return false;}
    }
  }
  return true;
}
```

Q14. (2 pt) Écrire en C une fonction `construit_inv` qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui construit dans S la relation inverse R^{-1} de R.

```
void construit_inv(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A])
```

SOLUTION

```
void construit_inv(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A]){
  int a,b;
  for(b=0 ; b<B ; b++){
    for(a=0 ; a<A ; a++){
```

```
      S[b][a]=R[a][b];
    }
  }
}
```

Q15. (4 pt) Écrire en C un prédicat `est_fonction_injective` qui prend en paramètre une relation $R \subseteq A \times B$ et indique si la relation R est une fonction injective.

```
bool est_fonction_injective(int A, int B, bool R[A][B])
```

SOLUTION

```
bool est_fonction_injective(int A, int B, bool R[A][B]){
  bool Inv[B][A];
  construit_inv(A, B, R, Inv);
  return est_fonction(A, B, R) && est_fonction(B, A, Inv);
}
```

Q16. (4 pt) Écrire en C un prédicat `test` qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui teste si les deux relations R et S vérifient la propriété

$$\forall x \in A, ((\exists y \in B, x\ R\ y) \Rightarrow (\exists z \in B, z\ S\ x))$$

```
bool test(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A])
```

SOLUTION

```
bool test(int A, int B, bool R[A][B],  bool S[B][A]){
  int x,y, z, exiy, exiz;
  for(x=0 ; x<A ; x++){
    exiy=0; exiz=0;
    for(y=0 ; y<B && exiy==0 ; y++){
        if (R[x][y]){ exiy++;}
    }
    if (exiy>0) { for(z=0 ; z<B && exiz==0 ; z++){
                      if (S[z][x]){ exiz++;}
                  }
                }
    if ((exiy==1) && (exiz==0)) { return false;}
    }
  }
  return true;
}
```

Exercice 5 : Relation d'équivalence et ensemble quotient (10 pt)

On considère la relation R sur $\mathbb{N}$ définie par $x\ R\ y$ *si et seulement si* $x \div 10 = y \div 10$

Exemples :

- $40\ R\ 49$ puisque $40 \div 10 = 4 = 49 \div 10$
- $\neg(49\ R\ 50)$ puisque $49 \div 10 = 4 \neq 5 = 50 \div 10$

Q17. (1 pt) **Répondre par vrai ou faux**

(a) $0\ R\ 5$: *vrai* (c) $5\ R\ 50$: *faux*
(b) $5\ R\ 5$: *vrai* (d) $50\ R\ 10$: *faux*

Q18. (1.5 pt) Complétez le tableau de la relation R avec des V lorsque c'est nécessaire. Vous ne mettrez pas les F, on supposera qu'une case non remplie correspond à F.

SOLUTION

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
1	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
2	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
3	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
4	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
5	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
6	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
7	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
8	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
9	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V											
10											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
11											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
12											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
13											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
14											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
15											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
16											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
17											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
18											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
19											V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
20																					V

Q19. (1.5 pt) Démontrez que la relation R est une relation réflexive.

SOLUTION

On doit montrer que

$$\forall x \in \mathbb{N}.\ x\ R\ x$$

ce qui dans notre cas revient à montrer

$$\forall x \in \mathbb{N}.\ x \div 10 = x \div 10$$

C'est vérifiée puisque l'égalité est une relation réflexive.

Q20. (1 pt) Que faut-il démontrer pour prouver que la relation R est une relation transitive ?

SOLUTION

On doit montrer que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}.\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$$

ce qui dans notre cas revient à montrer

$$\forall x \in \mathbb{N}.\ x \div 10 = y \div 10\ \wedge\ y \div 10 = z \div 10 \Rightarrow x \div 10 = z \div 10$$

C'est vérifiée puisque l'égalité est une relation transitive

Q21. (1 pt) Que faut-il démontrer encore pour prouver que la relation R est une relation d'équivalence ?

Réponse : Il faudrait montrer que la relation R est symétrique
c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathbb{N}.\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

Q22. (1 pt) **Complétez les pointillés**

On admet que R est une relation d'équivalence.
Rappel : la classe d'équivalence $C\ell(x)$ d'un entier x est définie par $C\ell(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid x\ R\ y\}$

Donnez la classe d'équivalence de chacun des entiers 0, 5, 10, 111 :

$$\begin{aligned}
C\ell(0) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \\
C\ell(5) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
C\ell(10) &= \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\} \\
C\ell(111) &= \{111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119\}
\end{aligned}$$

Q23. (1 pt) **Complétez les pointillés**

Rappel : On construit l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ en ne conservant que le plus petit élément de chaque classe d'équivalence.

Donnez l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ jusqu'à 50 : $\{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$

Q24. (1 pt) Complétez le tableau de la relation R sur l'ensemble quotient $\mathbb{N}_{/R}$ jusqu'à 50.

SOLUTION

R	0	10	20	30	40	50
0	V					
10		V				
20			V			
30				V		
40					V	
50						V

Q25. (1 pt) En déduire à quelle relation correspond la relation R sur $\mathbb{N}_{/R}$?

Réponse : R sur $\mathbb{N}_{/R}$ est la relation d'égalité
puisqu'il y a des V uniquement sur la diagonale

Exercice 6 : Analyse d'une relation (10 pt)

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (a-2) \times (b-1) \leq 1\}$$

Q26. (1 pt) Parmi les couples suivantes, lesquelles appartiennent à la relation R ?
$(0,0)$, $(0,10)$, $(10,0)$, $(1,7)$, $(7,1)$, $(5,2)$, $(2,5)$?

SOLUTION

$(0,10),\ (10,0),\ (1,7),\ (7,1),\ (2,5) \in R.$
$(0,0),\ (5,2) \notin R.$

Q27. (1 pt) Proposez un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in \mathbb{N},\ (n,a) \in R\ \wedge\ (a,n) \in R$.

SOLUTION

Soit $n = 1$ *et soit* $a \in \mathbb{N}$ *quelconque* . *Alors* $(a,1) \in R$ *car* $(a-2) \times (1-1) = 0 \leq 1$ *et* $(1,a) \in R$ *car* $(1-2) \times (a-1) = (-1) \times (a-1) \leq (-1) \times (-1)$, *qui est vrai car* $\forall a \in \mathbb{N},\ (a-1) \geq -1$.

Q28. (3 pt) Pour chacune des propriétés (a, b, c, d), indiquez si la relation R satisfait la propriété et **justifiez votre réponse.**

(a) R reflexive

SOLUTION

$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ R\ n$
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n-2) \times (n-1) \leq 1$
Faux pour $n = 4$. *En effet* $(4-2) \times (4-1) = 6 \not\leq 1$

(b) R symétrique

SOLUTION

$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y \Longrightarrow y\ R\ x$
$\forall x, y \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1 \Longrightarrow (y-2) \times (x-1) \leq 1$
Faux pour $x = 2, y = 4$. *En effet* $(2-2) \times (4-1) = 0 \leq 1$ *et pourtant,* $(4-2) \times (2-1) = 2 \not\leq 1$

(c) R transitive

SOLUTION

$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \overset{?}{\Longrightarrow} x\ R\ z$
$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1\ \wedge\ (y-2) \times (z-1) \leq 1 \overset{?}{\Longrightarrow} (x-2) \times (z-1) \leq 1$
Faux pour $x = 4, y = 1, z = 2$.
En effet, $(4-2) \times (1-1) = 0 \leq 1\ \wedge\ (1-2) \times (2-1) = -1 \leq 1$ *et pourtant,* $(4-2) \times (2-1) = 2 \not\leq 1$

(d) R anti-symétrique

SOLUTION

$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x \Longrightarrow x = y$
$\forall x, y \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1\ \wedge\ (y-2) \times (x-1) \leq 1 \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$
Faux pour $x = 0, y = 1$. *En effet,* $(0-2) \times (1-1) = 0 \leq 1\ \wedge\ (1-2) \times (0-1) = 1 \leq 1$
et pourtant $x = 0 \neq 1 = y$.

Q29. (2 pt) Donnez et simplifiez la relation $R \circ R$ sous la forme d'un ensemble de couples.

SOLUTION

$$\begin{array}{rcl} R \circ R & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1\ \wedge\ (y-2) \times (z-1) \leq 1\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x-2) \times (1-1) \leq 1\ \wedge\ (1-2) \times (z-1) \leq 1\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq 1\ \wedge\ (-1) \times (z-1) \leq 1\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq 1\ \wedge\ z-1 \geq -1\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq 1\ \wedge\ z \geq 0\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

Q30. (1 pt) En déduire que $R \circ (R \circ R) = R \circ R$.

SOLUTION

$$\begin{array}{rcl} R^3 = R \circ R^2 & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R^2\ z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1\ \wedge\ (y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x-2) \times (1-1) \leq 1\ \wedge\ \texttt{true}\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq x\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

Q31. (2 pt) On définit $R^2 = R \circ R$, et par récurrence $R^{k+1} = R \circ R^k$. En utilisant la question précedente, montrez par induction que $\forall k \in \mathbb{N},\ R^k = R \circ R$.

SOLUTION

Par induction sur , $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Supposons $R^k = R \circ R$. Montrons $R^{k+1} = R \circ R$.

$$\begin{array}{rcl} R^{k+1} = R \circ R^k & = & R \circ (R \circ R) \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R^2\ z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ (x-2) \times (y-1) \leq 1\ \wedge\ (y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x-2) \times (1-1) \leq 1\ \wedge\ \texttt{true}\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq x\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$