NOM .... Prénom .... Groupe ...
ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT ....si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 6 exercices indépendants
- Le sujet est sur 60 mais il suffit d'avoir 50 pour avoir la note maximale.
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés
- N'oubliez pas de mettre votre nom, votre numéro d'étudiant et de groupe sur le sujet.
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

Exercice 1 : Clôture transitive, circularité, accessibilité (10 pt)

Q1. (1 pt) Dessinez le graphe de la relation R sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par

$$R = \{(1, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 4),\ (4, 5)\}$$

Q2. (1.5 pt) Dessinez le graphe de la clôture transitive de la relation R.

Relation circulaire

Définition 1 *Une relation $R \subseteq A \times A$ est circulaire si*

$$\forall x \in A, \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ x\ R\ a_1\ \wedge\ a_1\ R\ a_2\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_n\ R\ x$$

Q3. (1 pt) Expliquez en quelques lignes ce que signifie cette définition.

Q4. (1 pt) La relation R est-elle circulaire ? Justifiez votre réponse.

Accessibilité

Définition 2 *Un élément e' est accessible depuis l'élément e par R s'il existe un chemin qui relie e à e' dans R (en respectant le sens des flèches).*

Q5. (1 pt) Donnez l'ensemble $acc(e)$ des éléments accessibles depuis e dans R pour $e = 1$, $e = 2$, $e = 3$.

Implantation

Indication : Si vous le souhaitez vous pouvez réutiliser la fonction écrite en TP

```
void cloture_transitive(int N, bool CTR[N][N], bool R[N][N])
```

qui remplit le tableau CTR avec la cloture transitive de la relation R.

Q6. (2.5 pt) Écrire une fonction C qui remplit l'ensemble `set` avec tous les éléments de $[0 \dots N-1]$ accessibles par R depuis l'élément e.

```
void accessible(bool R[N][N], int e, bool set[N])
```

Q7. (2 pt) Écrire en C un prédicat `circulaire` qui prend en paramètre une relation $R \subseteq N \times N$ et indique si une relation R est circulaire.

Exercice 2 : Propriétés de relations binaires (10 pt)

Q8. (8 pt) Pour chacune des propriétés suivantes donnez sous forme de tableau de booléenns une relation R sur $A = \{0, 1, 2\}$ qui satisfait la propriété et une relation qui ne la satisfait pas.

(a) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

R satisfaisant (a)

R	0	1	2
0			
1			
2			

R **ne** satisfaisant **pas** (a)

R	0	1	2
0			
1			
2			

(b) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x$

R satisfaisant (b)

R	0	1	2
0			
1			
2			

R **ne** satisfaisant **pas** (b)

R	0	1	2
0			
1			
2			

(c) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y \Longleftrightarrow y\ R\ x$

R satisfaisant (c)

R	0	1	2
0			
1			
2			

R **ne** satisfaisant **pas** (c)

R	0	1	2
0			
1			
2			

(d) $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x$

R satisfaisant (d)

R	0	1	2
0			
1			
2			

R **ne** satisfaisant **pas** (d)

R	0	1	2
0			
1			
2			

Q9. (1 pt) Parmi les propriétés (a, b, c, d), lesquelles correspondent exactement à la définition de « R symétrique » ?

Q10. (1 pt) Parmi les propriétés (a, b, c, d), lesquelles impliquent que R est symétrique ?

Exercice 3 : Programmation de prédicats sur les relations (10 pt)

Q11. (4 pt) Écrire en C un prédicat `sym` qui teste si deux relations R et S sur $\{0, ..., N-1\}$ vérifient la propriété

$\forall x, y, \ (x \ R \ y \Rightarrow y \ S \ x)$

Les relations R et S sont représentées par des tableaux de booléens `R` et `S`

```
bool sym(bool R[N][N], bool S[N][N])
```

Q12. (1 pt) Rappelez, en quelques lignes de français, les conditions pour qu'une relation $R \subseteq A \times B$ soit une fonction.

Q13. (1 pt) Donnez, la formule logique, qui traduit le fait qu'une relation $R \subseteq A \times B$ est une fonction.

Q14. (4 pt) Écrire en C un prédicat `fonction` qui teste si une relation $R \subseteq A \times B$ est une fonction de A vers B.

```
bool fonction(bool R[A][B])
```

Exercice 4 : Preuve en déduction naturelle ou Contre-exemple (10 pt)

Pour chacun des propriétés suivantes
– si elle est vraie, démontrez-la en déduction naturelle
– si elle est fausse : donnez un contre-exemple

1. $[(A \ \wedge \ B) \Rightarrow C] \Longrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$
2. $[A \ \wedge \ (B \ \vee \ C)] \Longrightarrow [(A \ \wedge \ B) \ \vee \ (A \ \wedge \ C))]$
3. $[(A \Rightarrow C) \ \vee \ (B \Rightarrow C)] \Longrightarrow [(A \ \vee \ B) \Rightarrow C]$
4. $[(A \Rightarrow C) \ \wedge \ (B \Rightarrow C)] \Longrightarrow [(A \ \vee \ B) \Rightarrow C]$

Exercice 5 : Composition de relations (10 pt)

On considère trois ensembles $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ et deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ définies par

$R = \{ (0, c), (4, a), (4, c), (6, a), (6, b), (6, c) \}$ et $S =$

S	1	3	5
a	V	F	F
b	F	F	V
c	F	F	V
d	F	V	F

Q15. (2 pt) Dessinez le graphe A vers B de R et le graphe B vers C de S.

Q16. vrai ou faux ? (2 pt)

1. S est une fonction ?
2. S est injective ?
3. S est surjective ?
4. S est bijective ?

Q17. (2 pt) Dessinez le graphe de la composition $S \circ R$.

Q18. (2 pt) Complétez la définition de

$$S \circ R = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

Q19. (4 pt) Écrire en C l'algorithme de composition de deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ représentées par des tableaux de booléens.

```
void composition(bool SoR[A][C], bool S[B][C], bool R[A][B])
```

Exercice 6 : Analyse d'une relation (10 pt)

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \times b \leq a + b \}$$

Q20. (6 pt) Pour chacune des propriétés (a, b, c, d)

1. Rappelez la définition générale de la propriété
2. Réécrire la définition dans le cas particulier de R
3. Indiquez si la relation R satisfait la propriété
4. Justifiez précisement la réponse 3.

(a) R reflexive

(b) R symétrique

(c) R transitive

(d) R anti-symétrique

Q21. (2 pt) Donnez la relation $R \circ R$ sous la forme d'un ensemble de couples.

Q22. (2 pt) En déduire que $R \circ (R \circ R) = R \circ R$