NOM .... Prm .... Groupe ...

ou NUM D'DIANT .... si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 6 exercices indépendants
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés
- N'oubliez pas de mettre votre nom ou votre numéro d'étudiant sur le sujet
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

Exercice 1 : Clotûre transitive, circularité, accessibilité

Q1. Dessinez le graphe de la relation R sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par
$R = \{ (1, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 4),\ (4, 5) \}$

Q2. Dessinez le graphe de la clotûre transitive de la relation R.

Relation circulaire

Définition 1 *Une relation $R \subseteq A \times A$ est circulaire si*

$$\forall x \in A, \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ x\ R\ a_1 \ \wedge\ a_1\ R\ a_2 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_n\ R\ x$$

Q3. Expliquez en quelques lignes ce que signifie cette définition.

Q4. La relation R est-elle circulaire ? Justifiez votre réponse.

Accessibilité

Définition 2 *Un élément e' est accessible depuis l'élément e par R s'il existe un chemin qui relie e à e' dans R (en respectant le sens des flêches).*

Q5. Donnez l'ensemble $acc(e)$ des éléments accessibles depuis e dans R pour $e = 1$, $e = 2$, $e = 3$.

SOLUTION

$$acc(1) = \{1, 3, 2, 4, 5\} = acc(3),\ \ acc(2) = \{\ \}$$

Implantation

Indication : Si vous le souhaitez vous pouvez réutiliser la fonction écrite en TP

```
void cloture_transitive(int N, bool CTR[N][N], bool R[N][N])
```

qui remplit le tableau CTR avec la cloture transitive de la relation R.

Q6. Écrire une fonction C qui remplit l'ensemble **set** avec tous les éléments de $[0 \dots N-1]$ accessibles apr R depuis l'éléments e.

```
void accessible(bool R[N][N], int a, bool set[N])
```

SOLUTION

```
void accessible(bool R[N][N], int e, bool set[N]){
  bool CTR[N][N] ;
  cloture_transitive(N,CTR,R);
  int e' ;
  for(e'=0 ; e'<N ; e'++){
    set[e']=false ;
    if (CTR[e][e']){ set[e']=true ;}
  }
}
```

Q7. Écrire en C un prédicat **circulaire** qui prend en paramètre une relation $R \subseteq N \times N$ et indique si une relation R est circulaire.

SOLUTION

```
bool circulaire(int N, bool R[N][N]){
  bool CTR[N][N] ;
  cloture_transitive(N,CTR,R) ;
  return est_reflexive(CTR) ;
  /* ou bien */
  int e ;
  for(e=0 ; e<N ; e++){
     if ( ! CTR[e][e] ){ return false ; }
  }
  return true ;
}
```

Exercice 2 : Propriétés de relations binaires

Q8. Pour chacune des propriétés suivantes donnez sous forme de tableau de booléenns une relation R sur $A = \{0, 1, 2\}$ qui satisfait la propriété et une relation qui ne la satisfait pas.

(a) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

R satisfaisant (a)

R	0	1	2
0	V/F	V	F
1	V	V/F	V
2	F	V	V/F

R **ne** satisfaisant **pas** (a)

R	0	1	2
0	?	F	V/F
1	V	V/F	V/F
2	V/F	V/F	V/F

(b) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x$

R satisfaisant (b)

R	0	1	2
0	V	V	V
1	V	V	V
2	V	V	V

R **ne** satisfaisant **pas** (b)

R	0	1	2
0	F	V/F	V/F
1	V/F	V/F	V/F
2	V/F	V/F	V/F

(c) $\forall x, y \in A,\ x\ R\ y \Longleftrightarrow y\ R\ x$

R satisfaisant (c)

R	0	1	2
0	V/F	V	F
1	V	V/F	V
2	F	V	V/F

R **ne** satisfaisant **pas** (c)

R	0	1	2
0	V/F	F	V/F
1	V	V/F	V/F
2	V/F	V/F	V/F

(d) $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x$

R satisfaisant (d)

R	0	1	2
0	V	V/F	V/F
1	V/F	V	V/F
2	V/F	V/F	V

R **ne** satisfaisant **pas** (d)

R	0	1	2
0	F	F	F
1	V/F	V/F	V/F
2	V/F	V/F	V/F

Q9. Parmi les propriétés (a, b, c, d), lesquelles correspondent à la définition de « R symétrique » ?

SOLUTION

(a) et (b) correspondent à la définition de « R symétrique ».

Exercice 3 : Programmation de prédicats sur les relations

Q10. Écrire en C un prédicat `sym` qui teste si deux relations R et S sur $\{0, ..., N-1\}$ vérifient la propriété

$$\forall x, y,\ (x\ R\ y \Rightarrow y\ S\ x)$$

Les relations R et S sont représentées par des tableaux de booléens `R` et `S`

```
bool sym(bool R[N][N], bool S[N][N])
```

Q11. Rappelez, en quelques lignes de français, les conditions pour qu'une relation $R \subseteq A \times B$ soit une fonction.

SOLUTION

Une relation $R \subseteq A \times B$ est une fonction si pour tout $a \in A$, il existe au plus un $b \in B$ tel que $a\ R\ b$.

Q12. Donnez, la formule logique, qui traduit le fait qu'une relation $R \subseteq A \times B$ est une fonction.

SOLUTION

$$\forall a \in A,\ , \forall b, b' \in B,\ a\ R\ b\ \wedge\ a\ R\ b' \Rightarrow b = b'$$

Q13. Écrire en C un prédicat `fonction` qui teste une relation $R \subseteq AB$ est une fonction de A vers B.

```
bool fonction(bool R[A][B])
```

Exercice 4 : Preuve en déduction naturelle ou Contre-exemple

Pour chacun des propriétés suivantes
– si elle est vraie, démontrez-la en déduction naturelle
– si elle est fausse : donnez un contre-exemple

1. $[(A \ \wedge \ B) \Rightarrow C] \Longrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$
2. $[A \ \wedge \ (B \ \vee \ C)] \Longrightarrow [(A \ \wedge \ B) \ \vee \ (A \ \wedge \ C))]$
3. $[(A \Rightarrow C) \ \vee \ (B \Rightarrow C)] \Longrightarrow [(A \ \vee \ B) \Rightarrow C]$
4. $[(A \Rightarrow C) \ \wedge \ (B \Rightarrow C)] \Longrightarrow [(A \ \vee \ B) \Rightarrow C]$

Exercice 5 : Composition de relations

On considère trois ensembles $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ et deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ définies par

$R = \{ (0, c), (4, a), (4, c), (6, a), (6, b), (6, c) \}$ et $S =$

S	1	3	5
a	V	F	F
b	F	F	V
c	F	V	F
d	V	V	V

Q14. Dessinez le graphe A vers B de R et le graphe B vers C de S.

Q15. Dessinez le graphe de la composition $S \circ R$.

Q16. Complétez la définition de

$S \circ R = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Q17. Écrire en C l'algorithme de composition de deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ représentées par des tableaux de booléens.

```
void composition(bool SoR[A][C], bool S[B][C], bool R[A][B])
```

SOLUTION

```
void composition(bool SoR[A][C], bool S[B][C], bool R[A][B]){
 int a;
 for(a=0; a<A ; a++){
   int c;
   for(c=0; c<C ; c++){
     SoR[a][c]=false ;
     int b;
     for(b=0 ; b<B ; b++){
       if (R[a][b] && S[b][c]){ SoR[a][c] = true ; break ; }
```

```
      }
    }
  }
}
```

Exercice 6 : Analyse d'une relation

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$R = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \times b \leq a + b \}$

Q18. Pour chacune des propriétés (a, b, c, d)

1. Rappelez la définition générale de la propriété
2. Réécrire la définition dans le cas particulier de R
3. Indiquez si la relation R satisfait la propriété
4. Justifiez précisement la réponse 3.

(a) R reflexive

SOLUTION

$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ R\ n$
$\forall n \in \mathbb{N},\ n \times n \leq n + n$
Faux pour $n = 3$.*En effet* $3 \times 3 = 9 \not\leq 6 = 3 + 3$

(b) R symétrique

SOLUTION

$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y \Longrightarrow y\ R\ x$
$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \times y + y \Longrightarrow y \times x \leq y + x$
Vrai car $+$ *et* $\times$ *sont commutatifs, donc* $x \times y = y \times x$ *et* $x + y = y + x$

R transitive

SOLUTION

$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \Longrightarrow x\ R\ z$
$\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ x \times y \leq x + y\ \wedge\ y \times z \leq y + z \overset{?}{\Longrightarrow} x \times z \leq x + z$
Faux pour $x = 2, y = 0, z = 3$. *En effet,* $2 \times 0 \leq 2 + 0\ \wedge\ 0 \times 3 \leq 0 + 3$ *et pourtant,* $2 \times 3 \not\leq 2 + 3$

R anti-symétrique

SOLUTION

$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x \Longrightarrow x = y$
$\forall x, y \in \mathbb{N},\ \underbrace{x \times y + y\ \wedge\ y \times x \leq y + x}_{x \times y \leq x + y} \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$
se simplifie en : $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \times y \leq x + y \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$
Faux pour $x = 0, y = 1$. *En effet,* $0 \times 1 \leq 0 + 1$ *et pourtant* $x = 0 \neq 1 = y$.

Q19. Donnez la relation $R \circ R$

SOLUTION

$$\begin{array}{rcl} R \circ R & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x \times y \leq x + y\ \wedge\ y \times z \leq y + z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \times 0 \leq x + 0\ \wedge\ 0 \times z \leq 0 + z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq x\ \wedge\ 0 \leq z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

Q20. En déduire que $R \circ (R \circ R) = R \circ R$

SOLUTION

$$\begin{array}{rcl} R^3 = R \circ R^2 & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x\ R\ y\ \wedge\ y\ R^2\ z\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x \times y \leq x + y\ \wedge\ (y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \times 0 \leq x + 0\ \wedge\ \texttt{true}\,\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq x\} \\ & = & \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$