Examen INF242, 2009-2010

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade

22 mai 2010

Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes personnelles manuscrites format A4

Le barème des exercices est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Logique propositionnelle : 20 points) *Prouver par la méthode de votre choix que cette formule est valide :* $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)).(\bar{s} + \bar{q}).(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{r} + \bar{p})$

□

Exercice 2 (Expansions (exercice du poly) : 15 points) *Trouver, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :*

1. *(7.5 points)* $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$
2. *(7.5 points)* $\forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \Rightarrow \forall x R(x, x)$

□

Exercice 3 (Déduction naturelle : 23 points) *Prouver par déduction naturelle les formules suivantes :*

- *(8 points)* $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists y P(y) \Rightarrow \exists z Q(z)$
- *(15 points)* $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y \neg Q(y) \wedge \forall x(P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists z R(z)$

□

Exercice 4 (Herbrand : 22 points) *Pour chacun de ces ensembles de formules,*

1. *(12 points) Donner la signature, le domaine de Herbrand ainsi que la base de Herbrand.*
   - $\Gamma_1 = \{P(x) \vee Q(x) \vee R(x), \neg P(a), \neg Q(b), \neg R(c)\}$
   - $\Gamma_2 = \{P(x), \neg Q(x), \neg P(f(x)) \vee Q(f(x))\}$
2. *(10 points = 5+5) Prouver si leur fermeture universelle a un modèle ou pas.*

Indication : Pour prouver que la fermeture n'a pas de modèle, il suffit de trouver un ensemble fini d'instances fermées insatisfiables.

Pour prouver que la fermeture de Γ_i a un modèle, il faut trouver une interprétation de Herbrand qui soit modèle de l'ensemble des instances fermées de Γ_i sur son domaine de Herbrand.

□

Exercice 5 (Unification : 10 points) *Appliquer l'algorithme d'unification aux équations suivantes, où a est une constante, g un symbole de fonction binaire et f un symbole de fonction ternaire.*

1. *(5 points)* $f(x, y, g(a, a)) = f(g(y, y), z, z)$
2. *(5 points)* $f(x, y, a) = f(y, g(z, z), x)$

□

Exercice 6 (Formalisation : 10 points) *Nous posons :*

- $SIDA$ *et* $H1N1$ *: deux constantes.*
- $V(x)$ *: on connaît un vaccin contre* x.
- $F(x, y)$ *:* x *est vacciné contre* y.

– $M(x, y)$: *x peut mourir de y.*
(i) On ne connaît pas de vaccin contre le SIDA.
(ii) On connaît un vaccin contre la grippe H1N1.
(iii) Si quelqu'un est vacciné contre une maladie alors on connaît un vaccin contre cette maladie.
(iv) Pour toutes les maladies si quelqu'un n'est pas vacciné alors il peut mourir de cette maladie.
(v) Si on connaît un vaccin contre une maladie alors tout le monde est vacciné.
Et de la conclusion :
(vi) Tout le monde peut mourir du SIDA et est vacciné contre la grippe H1N1.

1. *(10 points) Formaliser ces hypothèses en logique du premier ordre et la* **négation de la conclusion**.

□

Exercice 7 (Résolution : 20 points) *Prouver par résolution en logique du premier ordre que la* **négation** *de la formule suivante est contradictoire :*

$$\exists x \forall y \forall z (P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

□