EXAMEN INF242, 2011-2012

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade

Mai 2012
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

IMPORTANT :
- Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation. Nous nous autoriserons à enlever des points le cas échéant.
- De manière générale toute réponse non justifiée sera créditée de zéro point (par exemple indiquer les régles utilisées dans l'algorithme d'unification, dans la déduction naturelle ...).

Exercice 1 (Formalisation : Cluedo (20 points)) *Un meurtre a eu lieu. Sherlock Holmes et le docteur Watson mènent l'enquête. Sherlock recueille les indices suivants :*

1. *Le meurtre a eu lieu soit dans le* salon*, soit dans* la piscine*.*
2. *Si le meurtre a eu lieu dans le* salon *alors le meurtrier est soit le* docteur Olive*, soit* mlle Rose*.*
3. *Si le meurtre a eu lieu dans la* piscine *alors le meurtrier est le* colonel Moutarde*.*
4. *Si le meurtrier est le* docteur Olive *ou* mlle Rose *alors l'arme du crime est ni la* clef anglaise*, ni le* chandelier*.*
5. *L'arme du crime est soit la* clef anglaise*, soit le* chandelier*.*

À partir des faits suivants, Sherlock Holmes affirme au docteur Watson : « Le colonel Moutarde est le meurtrier, élémentaire mon cher Watson ! ».

Questions :
- *(6 points) Formaliser les faits et la conclusion de Sherlock Holmes à l'aide des notations suivantes :*
  - *s : le meurtre a eu lieu dans le* salon*.*
  - *p : le meurtre a eu lieu dans la* piscine*.*
  - *o : le meurtrier est le* docteur Olive*.*
  - *r : le meurtrier est* mlle Rose*.*
  - *m : le meurtrier est le* colonel Moutarde*.*
  - *a : l'arme du crime est la* clef anglaise*.*
  - *c : l'arme du crime est le* chandelier*.*

  Remarquons que « soit x, soit y » se modélise par $\overline{x \Leftrightarrow y}$.
- *(6 points) Mettre la conjonction des faits et la négation de la conclusion en forme normale conjonctive.*
- *(8 points) Prouver par la méthode de votre choix que le raisonnement de Sherlock est correct.*

□

Exercice 2 (Unification (Poly) (15 points)) *Les termes suivants sont-ils unifiables ? Si la réponse est oui, donner leur unificateur le plus général, sinon justifier la réponse négative.*
- *(4 points) $h(g(x), f(a, y), z)$ et $h(y, z, f(u, x))$.*
- *(4 points) $h(g(x), f(a, y), z)$ et $h(y, z, f(u, g(x)))$.*
- *(7 points) L'équation $f(g(y), y) = f(u, z)$ a deux solutions « les plus générales »(rappel : elles sont donc équivalentes). Indiquer ces deux solutions.*

□

Exercice 3 (n-expansion (20 points)) *Trouver, par la méthode des expansions, un modèle ET un contre-modèle de chacune des formules suivantes :*

1. *(6 points)* $\exists x P(x) \vee \forall x \exists y Q(x,y) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)$
2. *(7 points)* $\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y \neg Q(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y (x = y \Rightarrow Q(x,y))$
3. *(7 points)* $\forall x \exists y P(x,y) \vee \forall x \exists y \neg P(x,y)$

□

Exercice 4 (Skolémisation (15 points)) *Soit* $A = \forall x((\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \neg \exists x Q(x))$.

1. *(4 points) Skolémiser A.*
2. *(1 point) Donner la forme clausale* $F(A)$ *de A.*
3. *(5 points) Donner un ensemble d'instances contradictoires de* $F(A)$*. (Vous établirez la contradiction avec une preuve par résolution* **propositionnelle***)*
4. *(5 points) Prouver par factorisation, copie et résolution binaire que* $F(A)$ *est contradictoire.*

□

Exercice 5 (Résolution au premier ordre (20 points)) *Prouver l'ensemble de clauses ci-dessous est contradictoire. Vous donnez une preuve par instanciation puis une preuve par factorisation, copie et résolution binaire.*

1. $\neg Q(x) \vee R(x) \vee S(y)$
2. $Q(a) \vee Q(x) \vee P(x, f(x))$
3. $\neg R(x) \vee \neg Q(a)$
4. $Q(y) \vee \neg P(y,z)$
5. $\neg S(z) \vee \neg Q(z)$

□

Exercice 6 (Déduction Naturelle au premier ordre (20 points)) *Prouver les formules suivantes par déduction naturelle au premier ordre.*

1. *(5 points)* $\neg \forall x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$
2. *(5 points)* $\forall x(\forall y P(y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x))$
3. *(10 points)* $\neg \forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

□

Exercice 7 (Récurrence (10 points)) *Prouver par récurrence que pour tout* $n > 1$ *et tout ensemble de variables* $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$*, nous avons :*

$$\overline{a_1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \overline{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

□