

Problème de l'élection - Spécification

Spécification

Sûreté : « Rien de mal ne peut jamais arriver »

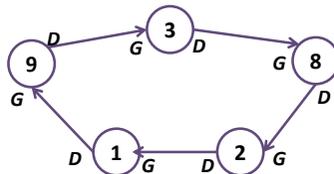
→ Au plus un processus est élu.

Vivacité : « Quelque chose de bien finit par arriver »

→ Un processus doit être élu en temps fini.

Chapitre 2 Election sur anneau

Hypothèses pour la solution



Topologie :

Anneau unidirectionnel, avec orientation consistante

Au moins 2 processus

Processus identifiés (identités uniques)

Processus :

Pas de faute

Processus et canaux asynchrones

Au moins un initiateur

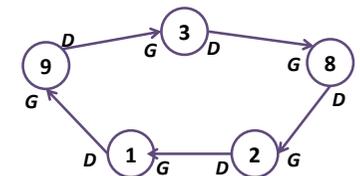
Canaux FIFO

Algorithme d'élection dans un anneau unidirectionnel de Le Lann

Principe

→ les nœuds sont identifiés

→ le nœud d'identifiant minimum est élu



Les nœuds collectent tous {3,8,1,2, 9}

→ Le nœud **1** est élu

Pour cela,

chaque nœud collecte les identifiants de tous les nœuds du réseau
puis calcule le minimum

Algorithme de Le Lann (élection)

→ Voir algorithme

Election de Le Lann : preuve de correction

Lemme : tout processus p reçoit en temps fini un message estampillé avec sa propre identité Idp

Preuve au tableau

Lemme : au moment où un nœud calcule sa variable **Leader**, sa variable **List** contient tous les identifiants des nœuds de l'anneau

Preuve au tableau

Lemme : un unique processus est élu en temps fini

Preuve au tableau

Théorème : l'algorithme résout le problème de l'élection dans un anneau unidirectionnel identifié.

Preuve au tableau

Que dire de l'hypothèse FIFO ??

Election de Le Lann : complexité

On note : n le nombre de nœuds dans l'anneau

Complexité en messages :

Nombre de messages échangés avant élection → ? $n \times n$ $O(n^2)$

Nombre de pas de calcul :

Nombre cumulé de fois où est exécuté le corps de boucle → ? $O(n^2)$

Complexité en temps : → ? $O(n)$

Hypothèses : temps de calcul = 0 ;

temps d'acheminement d'un message = 1

Complexité en mémoire : → ? $\Theta(n \log n)$

Nombre de bits utilisés pour exécuter l'algorithme par UN processus

Hypothèse : un identifiant est stocké en $\Theta(\log n)$ bits

Election dans un anneau unidirectionnel Amélioration de la solution

→ Réduire la mémoire utilisée

N'utiliser qu'une variable au lieu d'une liste ...

→ Réduire le nombre de messages échangés

Un message portant une « grande » identité n'a pas besoin d'être retransmis

A travailler au TD 2 ou 3...

Election dans un anneau

Amélioration de la solution

→ Algorithme de Chang&Roberts (TD3)

- seul un message d'identifiant plus petit que l'ID du nœud est retransmis (les autres sont éteints)
- le seul message qui fait le tour est celui d'identifiant minimum

Algorithme à simuler et prouver au TD3

Regarder l'algorithme

Quelles sont les hypothèses ? L'hypothèse FIFO est elle nécessaire ?

Performances :

- complexité en messages : meilleur cas linéaire, pire cas quadratique, $O(n^2)$
- complexité en temps : n
- complexité en mémoire : $O(\log n)$

→ Algorithme de Hirschberg&Sinclair et celui de Peterson (TD4/DM)

- complexité en messages en $O(n \log n)$

Algorithme probabiliste

de type Las Vegas

L'exécution de l'algorithme local d'un nœud est **probabiliste**

- son code contient un appel à **RANDOM**
- on ne peut plus assurer la même spécification

Spécification (Las Vegas) :

Intuition : Algorithme toujours correct, mais qui peut ne pas terminer

Propriété de sûreté : toujours vérifiée

« Rien de mal ne peut jamais arriver »

→ Pour l'élection : Au plus un processus élu

Propriété de vivacité : satisfaite avec probabilité >0

« Quelque chose de bien finit par arriver avec probabilité >0 »

→ Pour l'élection : un processus élu en temps fini, avec probabilité >0

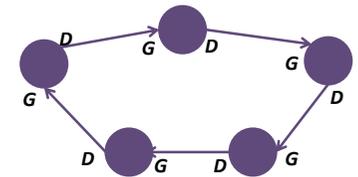
Election dans un anneau unidirectionnel anonyme

Anonyme

→ Pas d'identifiant

Théorème

→ Il n'existe pas d'algorithme déterministe qui réponde au problème de l'élection dans un anneau anonyme asynchrone



« Preuve »

Anneau de taille ≥ 2

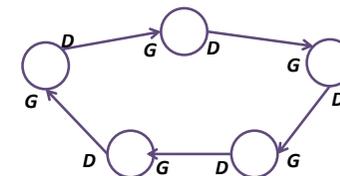
→ la topologie ne permet pas de distinguer les nœuds

Tous les nœuds ont le même algorithme, les mêmes variables, initialisées avec les mêmes valeurs

→ ils s'exécutent tous de la même façon

→ si un nœud se déclare leader, ils se déclarent tous leader !

Hypothèses pour la solution probabiliste



Topologie :

Anneau unidirectionnel, avec orientation consistante

Au moins 2 processus, au moins un initiateur

Processus anonymes

Processus :

Pas de faute

Processus et canaux asynchrones

Canaux FIFO

Chaque processus connaît le nombre exact de nœuds dans l'anneau n

Algorithme d'élection dans un anneau anonyme unidirectionnel, de Itai et Rodeh

Principe : Adaptation de l'algorithme de Chang & Roberts

Une phase :

1. Chaque nœud candidat tire son identifiant au hasard et l'envoie dans l'anneau
2. Elimination des nœuds d'identifiants plus grands
→ Le minimum peut ne pas être unique !
3. Détection de l'unicité du minimum
→ Par comptage du nombre de sauts

Si minimum non unique, on commence une **nouvelle phase**.

Algorithme de Itai et Rodeh (élection anonyme)

→ Voir algorithme

Election de Itai et Rodeh : preuve de correction

Synchronisation

Numéro de phase d'un identifiant Idp :

nombre de fois où Idp a été affecté

Exemple : après exécution de ligne 7, Idp a pour numéro de phase 1

Remarque : Soit p un nœud portant un identifiant de num. phase k

Les $k-1$ messages émis par p avec ses $k-1$ identifiants précédents ont fait chacun le tour de l'anneau.

Lemme (Synchronisation) :

Les comparaisons lignes 17 et 19 s'exécutent toujours entre identifiants de même numéro de phase

Preuve au tableau

Election de Itai et Rodeh : preuve de correction

Lemme (Sûreté) : tout processus ayant positionné sa variable *Etat* à *Passif* restera *Passif* indéfiniment.

Lemme (Sûreté) : quand un processus positionne sa variable *Etat* à *Leader*, tous les autres processus ont positionné leur variable *Etat* à *Passif*.

Preuve au tableau

Lemme (Vivacité) : un unique processus est élu en temps fini avec **probabilité 1**

Preuve au tableau

Théorème : l'algorithme résout le problème de l'élection Las Vegas dans un anneau unidirectionnel anonyme.

Que dire de l'hypothèse FIFO ??