

NOM :

Prénom :

INFO 3 - 2020-21 - Mathématiques Discrètes

Contrôle du 4 novembre 2020

Durée : 1 heure.

Calculatrice et documents interdits, sauf une feuille format A4 manuscrite recto-verso.

Le barème est donné à titre indicatif.

Les réponses aux exercices 1 à 3 doivent être données directement sur l'énoncé. Toutes les réponses des exercices 4 à 6 doivent être justifiées sur votre copie.

– 1 – (5 points). Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit $Y = X^*$ l'ensemble des mots sur X . On appelle :

- L_1 l'ensemble des mots sur X ne contenant aucun a ,
- et L_2 l'ensemble des mots sur X ne contenant aucun c .

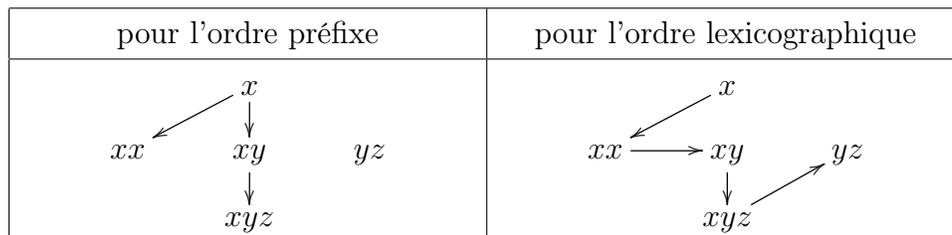
Remplir le tableau suivant : pour chaque affirmation, V signifie que cette affirmation est vraie, F signifie qu'elle est fausse, et signifie que vous ne savez pas répondre.

$\varepsilon \in X$	$L_1 \in Y$	$\{bcb, cc\} \in L_1$	$\varepsilon \in L_1 \cap L_2$	$abc \in L_1 \cup L_2$
F	F	F	V	F

$L_1 \subseteq Y$	$\emptyset \subseteq X$	$\{abc\} \subseteq X$	$\varepsilon \subseteq L_1 \cap L_2$	$\{aa, cc\} \subseteq L_1 \cup L_2$
V	V	F	F	V

– 2 – (2 points)

On considère les 5 mots x, xx, xy, yz, xyz sur l'alphabet $\{x, y, z\}$ (avec $x < y < z$). Dessinez le diagramme prédécesseur-successeur pour ces 5 mots :



– 3 – (3 points).

On considère le nombre n qui s'écrit $0b:2c$ en octets.

a. Quelle est l'écriture hexadécimale de n ?

b. Quelle est l'écriture décimale de n ?

c. Quelle est l'écriture binaire de n ?

– 4 – (3 points)

Soit A un alphabet comportant au moins 2 symboles distincts.

Pour chacune des affirmations suivantes :

- Dire si elle est vraie ou fausse pour tous mots u et v de A^* .
- Le démontrer.

a. Si u est à la fois un préfixe et un suffixe de v , alors $u = v$.

Faux, par exemple a est préfixe et suffixe de aba mais $a \neq aba$

b. Si $u = v$, alors u est à la fois un préfixe et un suffixe de v .

Vrai, car alors $v = u.\varepsilon$ et $v = \varepsilon.u$

c. Si $u \sqsubseteq v$ alors $u \leq_{lex} v$.

Vrai par définition de l'ordre lexicographique.

d. Si $u \leq_{lex} v$ alors $u \sqsubseteq v$.

Faux, par exemple $a \leq_{lex} b$ mais $a \not\sqsubseteq b$

– 5 – (4 points)

Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$.

a. Combien y a-t-il de mots sur X de longueur 3 ne contenant pas la lettre b ? $(5 - 1)^3$

b. Combien y a-t-il de parties de X de cardinal 3 ne contenant pas la lettre b ? 4

c. Combien y a-t-il de mots sur X de longueur 4 contenant le facteur ab ? $3 \times 5^2 - 1$

d. Combien y a-t-il de parties de X de cardinal 4 n'incluant pas l'ensemble $\{a, b\}$? 2

– 6 – (3 points). Pour tout mot binaire u , on note $|u|_0$ le nombre de "0" dans u , et $|u|_1$ le nombre de "1" dans u , et $f(u)$ le maximum de $|u|_0$ et de $|u|_1$.

a. Calculez $f(u)$ pour tous les mots binaires u de longueur ≤ 2 .

u	ε	0	1	00	01	10	11
$f(u)$	0	1	1	2	1	1	2

b. Est-ce que f est une fonction de $\{0, 1\}^*$ vers \mathbb{N} ?

Oui, c'est une composée de fonctions connues

c. Est-ce que f est un homomorphisme de monoïdes de $(\{0, 1\}^*, .)$ vers $(\mathbb{N}, +)$?

Non, par exemple $f(01) = 1$ alors que $f(0) + f(1) = 1 + 1 = 2$