NOM :	**Prénom :**

INFO 3 - 2019-20 - Mathématiques Discrètes

Corrigé du contrôle du 13 novembre 2019

– 1 – *(3 points).*

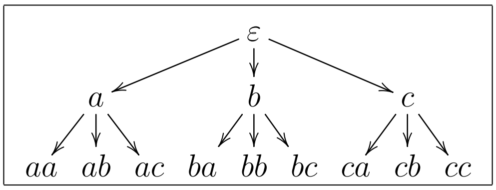
Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit $Y = X^*$ l'ensemble des mots sur X. Remplir le tableau suivant. Dans la case de la ligne p et de la colonne i, $\boxed{O}$ signifie que i vérifie p, $\boxed{N}$ signifie que i ne vérifie pas p, et $\boxed{}$ signifie que vous ne savez pas répondre.

	$\emptyset$	ε	$\{\varepsilon\}$	a	ab	aa	$\{a\}$	$\{ab\}$	$\{a,b\}$
$\in X$	N	N	N	O	N	N	N	N	N
$\in Y$	N	O	N	O	O	O	N	N	N
$\subseteq X$	O	N	N	N	N	N	O	N	O
$\subseteq Y$	O	N	O	N	N	N	O	O	O

– 2 – *(3 points)*

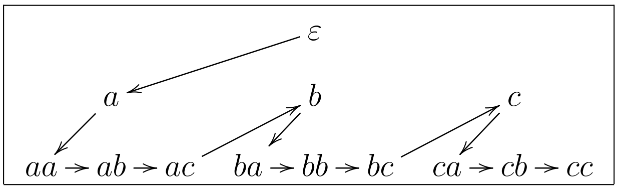
Dans cet exercice, on considère tous les mots de longueur $\leqslant 2$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

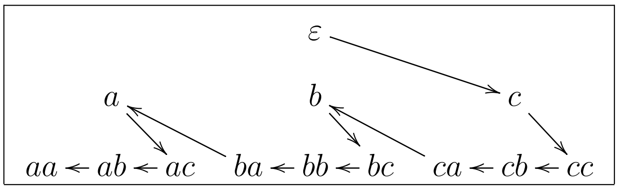
a. Dessinez une flèche $u \to v$ si et seulement si v est un successeur de u (c'est-à-dire : si et seulement si v est juste après u) pour l'ordre préfixe :



b. Dessinez une flèche $u \to v$ si et seulement si v est un successeur de u (c'est-à-dire : si et seulement si v est juste après u) pour l'ordre lexicographique.

Dans le cadre de gauche, l'ordre sur l'alphabet est $a < b < c$, et dans le cadre de droite on considère que $c < b < a$.





– **3** – *(2 points)*

Sur l'alphabet $A = \{a, b, \ldots, y, z\}$ on considère le mot *errer*.

Combien a-t-il de préfixes ? de suffixes ? de facteurs ?

6 préfixes et 6 suffixes (car mot de longueur 5).

12 facteurs (ce qui n'a rien à voir avec 6+6) : ε, e, r, er, rr, re, err, rre, rer, erre, rrer, errer.

– **4** – *(4 points)* Soit $X = \{a, e, i, o, u\}$.

a. Combien y a-t-il de mots de longueur 4 sur X ? $\boxed{5^4}$

b. Combien y a-t-il de mots de longueur 4 sur X contenant au moins un o ?

$5^4 - 4^4$ (tous les mots de longueur 4 sauf ceux qui n'ont aucun o)

c. Combien y a-t-il de mots de longueur 4 sur X contenant au moins une fois le facteur *ou* ?

$3 * 5^2 - 1$ (trois positions pour le facteur, 5^2 choix pour les lettres restantes, on enlève le doublon *ouou*)

d. Combien y a-t-il de parties à 4 éléments de X ? $\boxed{5}$

e. Combien y a-t-il de parties à 4 éléments de X contenant au moins un o et au moins un u ? $\boxed{3}$

f. Combien y a-t-il de parties à 4 éléments de X contenant au moins deux o et au moins deux u ? $\boxed{0}$

– **5** – *(3 points)*.

Soit n un entier strictement positif. On note $t(n)$ la *taille en binaire* de n, c'est-à-dire le nombre de bits dans l'écriture de n en base 2.

a. Rappeler (sans justification) comment calculer (approximativement) $t(n)$ à partir de n.

Un nombre dont la taille est $t(n)$ en base 2 vaut environ $n \simeq 2^{t(n)}$. Réciproquement, $t(n) \simeq \log_2 n$.

b. Supposons que $n = p \times q$ pour deux entiers strictement positifs p et q. Exprimer $t(n)$ (approximativement) en fonction de $t(p)$ et $t(q)$.

$t(p \times q) \simeq t(p) \times t(q)$ (propriété du logarithme)

c. Supposons que $n = p + q$ pour deux entiers strictement positifs p et q. Exprimer $t(n)$ (approximativement) en fonction de $t(p)$ et $t(q)$.

$t(p + q) \simeq max(t(p), t(q))$ (le résultat est de la même taille que le plus grand des nombres)

– 6 – *(3 points).*

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $f(n) = |n|$ (valeur absolue de n).

a. Est-ce que f est une injection ?

$\boxed{\text{Non, } f(-1) = f(1) = 1}$

b. Est-ce que f est une surjection ?

$\boxed{\text{Oui, pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(n) = n. \text{ Tout entier positif a au moins un antécédent : lui-même.}}$

c. Est-ce que f est une bijection ? Si oui, trouvez sa fonction réciproque.

$\boxed{\text{Non car ce n'est pas une injection.}}$

d. Est-ce que f est un homomorphisme de monoïdes de $(\mathbb{Z}, \times)$ vers $(\mathbb{N}, \times)$?

$\boxed{\text{Oui car } f(1) = 1 \text{ et pour tous } n, m \in \mathbb{N},\ f(n \times m) = |n \times m| = |n| \times |m| = f(n) \times f(m).}$

– 7 – *(3 points).* On considère deux codes binaires alphabétiques sur l'alphabet $\{a, b\}$:

Le code f est défini par $f(a) = 0,\ f(b) = 10$.

Le code g est défini par $g(a) = 0,\ g(b) = 01$.

a. Calculer $f(aab)$ et $f(\varepsilon)$.

$\boxed{f(aab) = 0010}$ $\boxed{f(\varepsilon) = \varepsilon}$

Est-ce que f est un code préfixe ?

$\boxed{\text{oui, aucun symbole n'a pour code un préfixe d'un autre symbole.}}$

Est-ce que la fonction f est injective ?

$\boxed{\text{Oui car c'est un code préfixe.}}$

b. Calculer $g(aab)$ et $g(bb)$.

$\boxed{g(aab) = 0001}$ $\boxed{g(bb) = 0101}$

Est-ce que g est un code préfixe ?

$\boxed{\text{Non, car } g(a) \sqsubseteq g(b)}$

Est-ce que la fonction g est injective ?

Oui, il suffit par exemple de décoder par la droite :

- un 0 est forcément le code d'un a
- un 1 est forcément précédé d'un 0 et ensemble ils codent un b