

Examen du 18 janvier 2021

Durée : 1 heure 30.

Calculatrice et documents interdits, sauf une feuille format A4 manuscrite recto-verso.

Le barème est donné à titre indicatif.

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin.

– 1 – (3 points).

Soit $X = \{a, b, c\}$.

- Combien y a-t-il de mots de longueur 4 sur X ?
- Combien y a-t-il de mots de longueur 4 sur X contenant au plus une fois la lettre a ?
- Combien y a-t-il de parties de X ?
- Combien y a-t-il de parties de X de cardinal 4 ?
- Combien y a-t-il de parties de X contenant au plus une fois l'élément a ?
- Combien y a-t-il de fonctions de X vers $\{0, 1\}$?

– 2 – (2 points).

On considère le nombre n qui s'écrit (en base 10) : $n = (123\,345)^{6789}$.

- Calculez n modulo 2.
- Calculez n modulo 9.

– 3 – (2 points).

On considère le nombre p qui s'écrit $p = 9A8BF02$ en base 16. Calculez p modulo 15.

Dans cet énoncé, 16 et 15 sont écrits en base 10, et la réponse doit être en base 10.

– 4 – (3 points).

Soit n un entier ≥ 2 et soit $X = \{0, 1\}^n$. On note $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$.

- On considère la fonction $f : X \rightarrow X$ définie par $f(x_1x_2 \dots x_n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$.
Montrer que f est bijective en calculant sa fonction réciproque.
- On considère la fonction $g : X \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $g(x_1x_2 \dots x_n) = \bar{x}_1$.
 - Est-ce que la fonction g est injective ? surjective ? bijective ?
 - Quelle est la partition de X associée à la fonction g ?
 - Quelle est la relation d'équivalence sur X associée à la fonction g ?

– 5 – (3 points).

Alice souhaite transmettre un message binaire à Bob en utilisant un canal imparfait. Sachant que le canal ne change pas le nombre de bits du message et ne provoque pas plus d'une erreur par mot de 7 bits transmis, elle utilise pour cela le code de Hamming vu en cours. On rappelle qu'avec ce code, si Alice veut transmettre un mot u de 4 bits elle doit d'abord former un mot v de 7 bits, envoyer ce mot sur le canal, alors Bob reçoit un mot w de 7 bits et il retrouve u à partir de w .

Répondre et justifier vos réponses aux questions suivantes.

- Combien y a-t-il de mots u possibles ?
- Est-ce que le passage de u à v est une fonction ? Si oui, est-elle injective ?
- Est-ce que le passage de v à w est une fonction ? Si oui, est-elle injective ?
- Est-ce que le passage de w à u est une fonction ? Si oui, est-elle injective ?

– 6 – (4 points).

On considère une relation binaire R sur un ensemble X .

La relation binaire Q sur le même ensemble X est construite de la façon suivante :

$x Q y$ si et seulement si $y R x$ (si y n'est pas en relation avec x).

- Lorsque X est fini, peut-on déterminer la matrice de Q à partir de celle de R ?
Si oui, comment ?
- Si R est réflexive, est-ce que Q l'est aussi ?
- Si R est symétrique, est-ce que Q l'est aussi ?
- Si R est transitive, est-ce que Q l'est aussi ?
- Si R est antisymétrique, est-ce que Q l'est aussi ?

– 7 – (3 points).

Soit la phrase à 34 symboles :

UN HARMONIUM AJOUTA TON UT AU TRIO

(Attention à ne pas oublier le caractère espace.)

- À l'aide de l'algorithme de Huffman, calculer un arbre de codage optimal pour cette phrase.
- Coder les 10 premiers caractères de cette phrase selon le code obtenu.
- Décoder le début de mot binaire suivant à l'aide de votre code :

011101101011100011110111011000...