INFO 3 - 2019-20 - Mathématiques Discrètes - *B. Wack*

Examen du 14 janvier 2020

Durée : 2 heures.
Calculette et documents interdits, sauf une feuille format A4 manuscrite recto-verso.
Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin.

– **1** – *(2 points).*

Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$.

a. Combien y a-t-il de mots de longueur 5 sur X contenant exactement deux fois la lettre a ?

b. Combien y a-t-il de parties de X contenant exactement deux fois l'élément a ?

c. Combien y a-t-il de fonctions de X vers $\{0, 1\}$?

d. Combien y a-t-il de relations binaires sur X ?

– **2** – *(1,5 points).*

On considère le nombre n qui s'écrit `DCBA42` en hexadécimal (base 16).

a. Quelle est l'écriture de n en binaire (base 2) ?

b. Combien y a-t-il, approximativement, de chiffres dans l'écriture de n en décimal (base 10) ?

c. Combien y a-t-il, approximativement, de chiffres dans l'écriture de n^2 en décimal ?

– **3** – *(2 points).*

Effectuez les calculs suivants modulo 26, en donnant les détails du calcul (chaque résultat doit être un entier entre 0 et 25) :

a. $x = (2 \times 13)^5$ modulo 26.

b. $y = 100$ modulo 26.

c. $z = 10000$ modulo 26.

d. $t = (25 \times 27)^{26}$ modulo 26.

– **4** – *(2 points).*

On définit la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par :

$f(x) =$ le nombre de lettres dans l'écriture de x en français.

a. Justifier que f est bien une fonction.

b. Est-elle injective ?

c. Est-elle surjective ?

d. Est-elle bijective ?

e. Est-elle un homomorphisme de monoïdes de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{N}, +)$?

– 5 – *(2 points).*

On considère le code de Hamming binaire de longueur 7, de matrice génératrice G et de matrice de contrôle H :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alice choisit un mot u de longueur 4, elle le code avec ce code de Hamming avant de l'envoyer à Bob. Bob reçoit le mot $w = 0110010$. On suppose qu'il n'y a pas eu plus d'un bit erronné lors de la transmission. Quel était le mot u ?

– 6 – *(4,5 points).*

On considère une relation binaire R sur un ensemble X.

La relation binaire Q sur le même ensemble X est construite de la façon suivante :

$$x \; Q \; y \text{ si et seulement si } y \; R \; x.$$

a. Lorsque X est fini, peut-on déterminer la matrice de Q à partir de celle de R ? Si oui, comment ?
b. Si R est réflexive, est-ce que Q l'est aussi ?
c. Si R est symétrique, est-ce que Q l'est aussi ?
d. Si R est transitive, est-ce que Q l'est aussi ?
e. Si R est antisymétrique, est-ce que Q l'est aussi ?

– 7 – *(4 points).*

Soit A un alphabet quelconque.

Sur l'ensemble A^* on définit une relation binaire R en posant $u \; R \; u.a$ pour tout mot $u \in A^*$ et pour tout symbole $a \in A$.

a. Décrire la relation R dans un cas simple, par exemple avec $A = \{a, b, c\}$ et en ne considérant que les mots de longueur inférieure ou égale à 2.
b. Pour chaque entier $k \geqslant 0$, décrire la relation itérée R^k.
c. Quelle est la relation de préordre engendrée par R ?
d. Quelle est la relation d'équivalence engendrée par R ?

– 8 – *(2 points).*

On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ associant à chaque entier relatif sa valeur absolue : $f(x) = |x|$.

Décrivez la partition de $\mathbb{Z}$ et la relation d'équivalence correspondant à cette fonction.