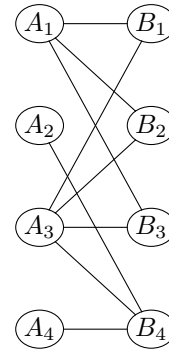


## Couplage maximal dans un graphe biparti

Dans tout ce TD on considère des graphes **non orientés** : on rappelle que dans ce cas l'arc  $(x, y)$  est présent si et seulement si  $(y, x)$  l'est, et que dans ce cas ils constituent à eux deux une seule et même arête. Les sommets  $x$  et  $y$  sont alors dits *voisins* et le degré de  $x$  est le nombre de ses voisins.

Un graphe  $G$  est dit **biparti** si on peut partitionner son ensemble de sommets  $X$  en deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  ( $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ ,  $A \cup B = X$  et  $A \cap B = \emptyset$ ) de sorte que toute arête ait une extrémité dans  $A$  et une extrémité dans  $B$ .

Si les ensembles  $A$  et  $B$  ont même cardinal, on dit qu'il s'agit d'un graphe biparti équilibré. Dans tout le problème, on ne considère que des graphes bipartis équilibrés. On note  $n$  le cardinal commun aux ensembles  $A$  et  $B$ ; le graphe possède donc  $2n$  sommets. On suppose que l'on a toujours  $n \geq 1$ . Les sommets de  $A$  sont numérotés de 1 à  $n$  et nommés  $A_1, \dots, A_n$ ; de même les sommets de  $B$  sont nommés  $B_1, \dots, B_n$ . Une arête de  $G$  est toujours écrite en mettant d'abord l'extrémité qui est dans  $A$  puis celle qui est dans  $B$ . On représente les graphes bipartis équilibrés par des schémas comme on peut le voir dans le graphe  $G_0$  de la figure ci-contre, en représentant les sommets de  $A$  à gauche et les sommets de  $B$  à droite.



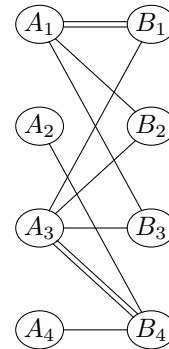
Un tel graphe peut représenter un problème d'affectation de tâches à des ouvriers : les tâches sont les sommets de  $B$ , et les ouvriers les sommets de  $A$ . Le graphe comporte une arête  $(A_i, B_j)$  si et seulement si l'ouvrier  $i$  est capable de réaliser la tâche  $j$ . Le but est alors d'affecter les tâches aux ouvriers de façon à réaliser un maximum de tâches (ou, ce qui revient au même, à laisser le moins possible d'ouvriers désœuvrés).

### 1 Le(s) problème(s) du couplage

On dit que deux arêtes d'un graphe  $G$  sont **incidentes** si elles ont une extrémité en commun. On appelle **couplage** dans  $G$  un ensemble d'arêtes de  $G$  deux à deux non incidentes.

Dans le graphe  $G_0$ , les arêtes  $(A_1, B_1)$  et  $(A_3, B_4)$  étant non incidentes, elles forment un couplage, (qu'on nomme  $C_0$ ), dont les arêtes sont dessinées en double ci-contre.

Le cardinal d'un couplage est le nombre d'arêtes de celui-ci; par exemple le cardinal de  $C_0$  vaut 2.



- Montrer qu'il est impossible d'ajouter une arête à  $C_0$  tout en conservant un couplage.  
Les seuls sommets de  $A$  qui ne sont pas pris sont  $A_2$  et  $A_4$ , or ils ne sont reliés qu'à  $B_4$  qui est déjà pris par une arête de  $C_0$ .  
On dit que  $C_0$  est **maximal** (sous-entendu « pour l'inclusion » : il n'existe pas de couplage contenant strictement  $C_0$ ).
- Déterminer un couplage de cardinal 3 dans  $G_0$ .  
 $(A_1, B_1), (A_3, B_3), (A_4, B_4)$  par exemple.
- Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver un couplage de cardinal 4 dans  $G_0$ .  
Là encore, un couplage de cardinal 4 imposerait d'y prendre une arête partant de  $A_2$  et de  $A_4$ , or ils ne sont reliés qu'à  $B_4$  qui serait donc un point d'incidence de deux arêtes du couplage.

On dit alors que le couplage de cardinal 3 est un couplage **maximum** (sous-entendu « pour le cardinal » : il n'existe pas de couplage de cardinal strictement supérieur).

Attention à ne pas confondre les deux notions. Dans tout ce TD, on ne s'intéressera qu'à la recherche d'un couplage **maximal**.

## 2 Représentation et vérification

Par définition, dans un couplage, chaque arête part d'un sommet de  $A$ , et un même sommet de  $A$  ne peut être l'extrémité que d'une arête au maximum. On représente donc un couplage dans un graphe biparti de  $2n$  sommets par un tableau d'entiers  $C$  indexé de 1 à  $n$ . L'entier  $C[i]$  vaut  $j$  si l'arête  $(A_i, B_j)$  fait partie du couplage; il vaut  $-1$  si le sommet  $A_i$  n'est l'extrémité d'aucune arête du couplage.

1. Écrire un algorithme qui vérifie si un tableau  $C$  représente un couplage dans le graphe  $G$ .

Il suffit de vérifier que :

- Toutes les valeurs de  $C$  sont comprises entre 1 et  $n$  ou égales à  $-1$ .
- Aucune des valeurs entre 1 et  $n$  n'est dupliquée (mais il peut y avoir plusieurs fois  $-1$ ).

2. Évaluer la complexité de cet algorithme.

Si on s'y prend naïvement on est en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Mais à l'aide d'un tableau "déjàvu" pour les valeurs entre 1 et  $n$ , on peut vérifier l'absence de doublons dans  $C$  en temps  $\mathcal{O}(n)$ .

## 3 Recherche exhaustive

Une première approche possible pour déterminer un couplage maximum est la suivante :

- choisir une arête  $a$  ;
- rechercher un couplage maximum parmi ceux ne contenant pas  $a$  ;
- rechercher un couplage maximum parmi ceux contenant  $a$  ;
- en déduire un couplage maximum.

Il n'est *pas demandé* d'écrire totalement un tel algorithme.

1. Quelle méthode serait appropriée à l'écriture d'un tel algorithme ?

Il est plus facile d'écrire cet algorithme récursivement : prendre  $a$  dans le couplage et faire un premier appel récursif sur le reste des arêtes, puis enlever  $a$  du couplage et faire un second appel récursif.

2. À vue de nez, quelle en serait la complexité? Est-ce bien raisonnable ?

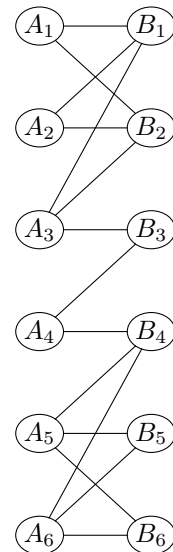
On énumère tous les sous-ensembles des arêtes de  $G$ , il y en a  $2^E$ .

## 4 Algorithme de détermination d'un couplage maximal

On cherche à construire un couplage maximal selon le principe suivant.

- On commence avec un couplage vide  $C$ .
- Tant que  $G$  possède au moins une arête :
  - on choisit une arête  $a$  de  $G$  dont la somme des degrés des extrémités soit minimum ;
  - on ajoute l'arête  $a$  au couplage  $C$  ;
  - on retire de  $G$  l'arête  $a$  et toutes les arêtes incidentes à  $a$ .

1. Faire tourner cet algorithme sur l'exemple ci-contre.
2. Démontrer que le résultat est toujours un couplage maximal.
3. Expliciter le caractère glouton de cet algorithme.
4. Écrire l'algorithme détaillé. On pourra le décomposer en plusieurs procédures ou fonctions.
5. Déterminer sa complexité, et si nécessaire raffiner l'algorithme pour améliorer cette complexité.



## Pour aller plus loin

On peut remarquer que, dans l'exemple de la question 4.1, le couplage calculé est maximal, mais ce n'est pas celui de cardinal **maximum**.

Les étudiants intéressés par la détermination d'un couplage maximum pourront se documenter sur l'*algorithme hongrois*, qu'on retrouve un peu partout.