Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

– construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

– construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;

– échantillonner le système à contrôler et construire un contrôleur échantillonné (théorie de la commande échantillonnée).

Dans tous les cas, il faut choisir la période.

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Théorème fondamental : Théorème des accroissements finis :

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Théorème fondamental : Théorème des accroissements finis :

Sous certaines conditions, pour tout x, t, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que

$$x(t+T) = \sum_{0}^{k} \frac{T^i}{i!} x^{(i)}(t) + \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(t+\alpha T)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Application

Pour intégrer numériquement le système d'équations différentielles

$$x' = f(x, u)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Application

Pour intégrer numériquement le système d'équations différentielles

$$x' = f(x, u)$$

on peut utiliser la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Question : combien vaut et peut-on borner l'erreur de la méthode ?

$$e(t) = |x(t) - \hat{x}(t)|$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Question : combien vaut et peut-on borner l'erreur de la méthode ?

$$e(t) = |x(t) - \hat{x}(t)|$$

cette question est cruciale car de sa réponse dépend la possibilité d'utiliser des ordinateurs pour piloter des systèmes

Décomposition de l’erreur

On introduit la donnée fictive :

$$\hat{\hat{x}}(t+T) = x(t) + T.f(x(t), u(t))$$

correspondant à ce qu’on calculerait si on connaissait la valeur exacte de $x(t)$ au pas précédent (c’est-à-dire si on n’avait pas fait d’erreur avant)

Décomposition de l'erreur

On introduit la donnée fictive :

$$\hat{\hat{x}}(t+T) = x(t) + T.f(x(t), u(t))$$

correspondant à ce qu'on calculerait si on connaissait la valeur exacte de $x(t)$ au pas précédent (c'est-à-dire si on n'avait pas fait d'erreur avant)

Cela permet de décomposer l'erreur en deux termes :

– l'erreur d'intégration $e_i = |x - \hat{\hat{x}}|$

Décomposition de l’erreur

On introduit la donnée fictive :

$$\hat{\hat{x}}(t+T) = x(t) + T.f(x(t), u(t))$$

correspondant à ce qu’on calculerait si on connaissait la valeur exacte de $x(t)$ au pas précédent (c’est-à-dire si on n’avait pas fait d’erreur avant)

Cela permet de décomposer l’erreur en deux termes :

– l’erreur d’intégration $e_i = |x - \hat{\hat{x}}|$

– l’erreur propagée $e_p = |\hat{\hat{x}} - \hat{x}|$

Décomposition de l'erreur

On introduit la donnée fictive :

$$\hat{\hat{x}}(t+T) = x(t) + T.f(x(t), u(t))$$

correspondant à ce qu'on calculerait si on connaissait la valeur exacte de $x(t)$ au pas précédent (c'est-à-dire si on n'avait pas fait d'erreur avant)

Cela permet de décomposer l'erreur en deux termes :

– l'erreur d'intégration $e_i = |x - \hat{\hat{x}}|$

– l'erreur propagée $e_p = |\hat{\hat{x}} - \hat{x}|$

et de majorer l'erreur globale par l'inégalité triangulaire

$$e \leq e_i + e_p$$

L'erreur d'intégration

On a :

$$x(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = x(t+T) - x(t) - Tx'(t)$$

L'erreur d'intégration

On a :

$$x(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = x(t+T) - x(t) - Tx'(t)$$

et, par les accroissements finis, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$x(t+T) - x(t) - Tx'(t) = \frac{T^2}{2} x''(t + \alpha T)$$

L'erreur d'intégration

On a :

$$x(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = x(t+T) - x(t) - Tx'(t)$$

et, par les accroissements finis, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que :

$$x(t+T) - x(t) - Tx'(t) = \frac{T^2}{2} x''(t+\alpha T)$$

D'où la majoration

$$\boxed{e_i \leq \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|}$$

où $x'' = \dfrac{\partial f}{\partial x} x' + \dfrac{\partial f}{\partial u} u'$

L'erreur propagée

On a :

$$\hat{x}(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = \hat{x}(t) - x(t) + Tf(\hat{x}(t), u(t)) - Tf(x(t), u(t)))$$

L'erreur propagée

On a :

$$\hat{x}(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = \hat{x}(t) - x(t) + Tf(\hat{x}(t), u(t)) - Tf(x(t), u(t)))$$

On applique les accroissements finis à la fonction $x + Tf(x, u)$

Il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$\hat{x}(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = (\hat{x}(t) - x(t))(1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha\hat{x}(t) + (1-\alpha)x(t), u(t)))$$

L'erreur propagée

On a :

$$\hat{x}(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = \hat{x}(t) - x(t) + Tf(\hat{x}(t), u(t)) - Tf(x(t), u(t)))$$

On applique les accroissements finis à la fonction $x + Tf(x, u)$

Il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$\hat{x}(t+T) - \hat{\hat{x}}(t+T) = (\hat{x}(t) - x(t))(1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha\hat{x}(t) + (1-\alpha)x(t), u(t)))$$

Et donc

$$\boxed{e_p(t+T) \leq \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)| e(t)}$$

Bilan global

On a :

$$e \leq e_i + e_p$$

$$e_i \leq \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

$$e_p(t+T) \leq \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| e(t)$$

Bilan global

On a :

$$e \le e_i + e_p$$

$$e_i \le \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

$$e_p(t+T) \le \sup_{x,u} |1 + T \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| e(t)$$

D'où

$$\boxed{e(t+T) \le \sup_{x,u} |1 + T \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| e(t) + \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|}$$

Analyse par cas

$$e(t+T) \leq \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)|e(t) + \frac{T^2}{2}\sup_t |x''(t)|$$

Comme tout est positif, le pire cas s'obtient en prenant l'égalité

$$e(t+T) = Ae(t) + B$$

avec

$$A = \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| \qquad B = \frac{T^2}{2}\sup_t |x''(t)|$$

Cas favorable

Analyse par cas

$$e(t+T) \leq \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| e(t) + \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

Comme tout est positif, le pire cas s'obtient en prenant l'égalité

$$e(t+T) = Ae(t) + B$$

avec

$$A = \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| \qquad B = \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

Cas favorable

– B est borné et $0 < A < 1$
  e tend vers une borne supérieure

$$\frac{B}{1-A}$$

Analyse du cas favorable

$$A = \sup_{x,u} \left| 1 + T \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| \qquad B = \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

B est borné et $0 < A < 1$

Analyse du cas favorable

$$A = \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| \qquad B = \frac{T^2}{2}\sup_t |x''(t)|$$

B est borné et $0 < A < 1$

Deux conditions :

1. $b = \dfrac{1}{2}\sup_t |x''(t)|$ est bornée

Analyse du cas favorable

$$A = \sup_{x,u} \left|1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \qquad B = \frac{T^2}{2}\sup_t |x''(t)|$$

B est borné et $0 < A < 1$

Deux conditions :

1. $b = \frac{1}{2}\sup_t |x''(t)|$ est bornée
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est partout négative et bornée inférieurement

Analyse du cas favorable

$$A = \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| \qquad B = \frac{T^2}{2} \sup_t |x''(t)|$$

B est borné et $0 < A < 1$

Deux conditions :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est partout négative et bornée inférieurement
   On peut alors trouver un T_0 tel que pour tout $T \leq T_0$

$$A = 1 - T \inf_{x,u} [-\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)]$$

Analyse du cas favorable

$$A = \sup_{x,u} |1 + T\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)| \qquad B = \frac{T^2}{2}\sup_t |x''(t)|$$

B est borné et $0 < A < 1$

Deux conditions :

1. $b = \frac{1}{2}\sup_t |x''(t)|$ est bornée
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est partout négative et bornée inférieurement

   On peut alors trouver un T_0 tel que pour tout $T \leq T_0$

   $$A = 1 - T\inf_{x,u}[-\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)]$$

   et donc un $T_1 \leq T_0$ tel que pour tout $T \leq T_1$

   $$A = 1 - Ta < 1$$

   avec $a = \inf_{x,u}[-\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)]$

Analyse du cas favorable

On a alors :

$$e = \frac{bT^2}{1 - aT}$$

et on peut trouver T suffisamment petit pour rendre cette erreur globale e arbitrairement petite.

Analyse du cas favorable

On a alors :

$$e = \frac{bT^2}{1 - aT}$$

et on peut trouver T suffisamment petit pour rendre cette erreur globale e arbitrairement petite.

C'est un résultat remarquable qui dit que, dans certaines conditions, on peut faire une succession d'approximations numériques à chaque pas, sans que les erreurs que chacune entraîne ne s'accumulent

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \frac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

– les sorties n'explosent pas

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

– les sorties n'explosent pas
– les erreurs passées s'oublient

Retour sur les conditions

les deux conditions sont :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

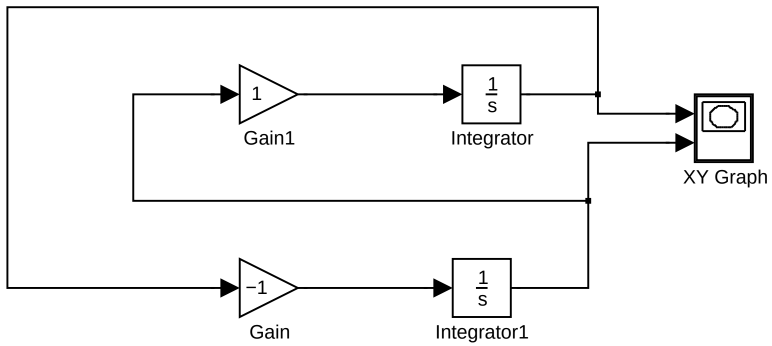
Rôle de la stabilité :

– les sorties n'explosent pas
– les erreurs passées s'oublient

On ne peut simuler fidèlement en temps réel sur ordinateur que des systèmes stables

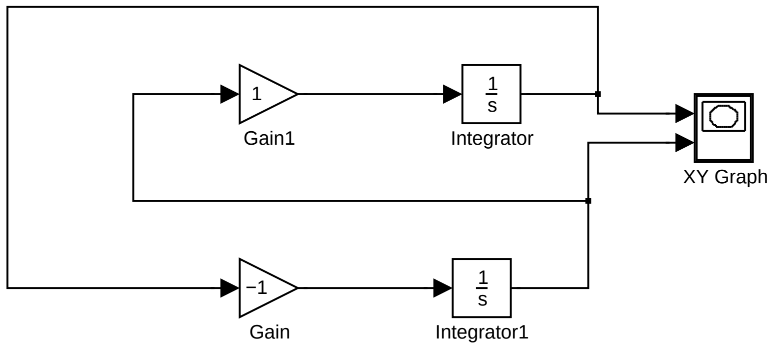
Exemple

Sinus cosinus : instable



Exemple

Sinus cosinus : instable



Simulation de longue durée