Stabilité des systèmes

Un sujet très important, une propriété globale

- Stabilité
- Systèmes rationnels
- Stabilisation par feed-back
- Placement de pôles
- Théorie de Lyapunov

Stabilité - exemples

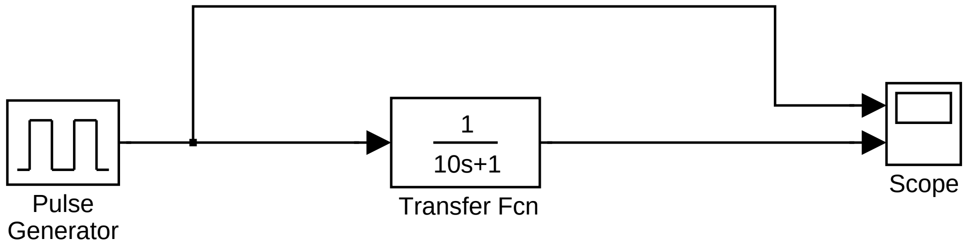
Stabilité - exemples

Un système déplacé d’un point d’équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

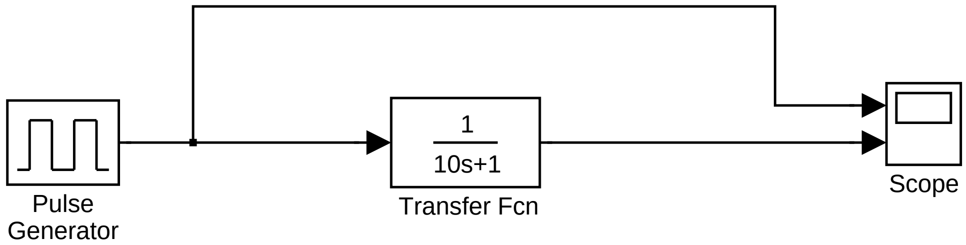
Exemple : Un système stable

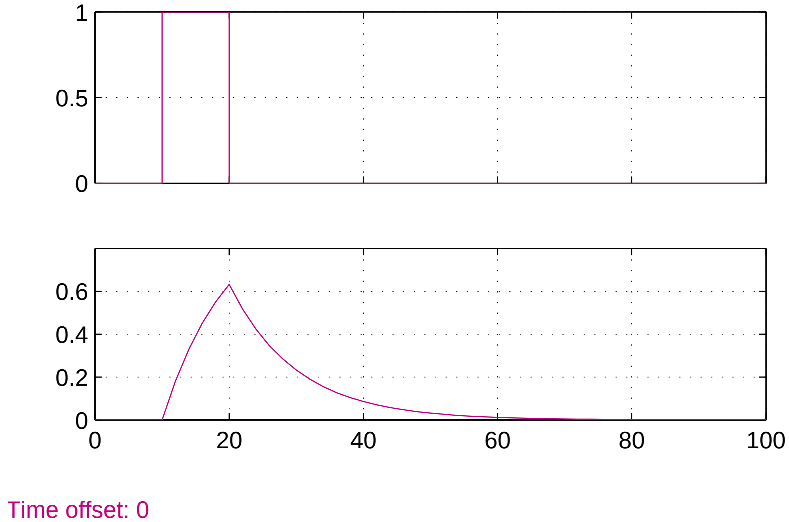


Stabilité - examples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système stable

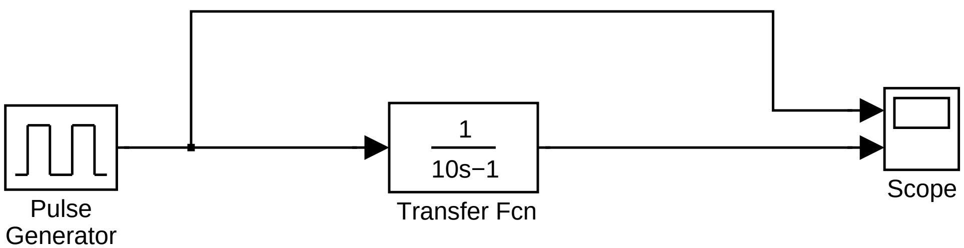


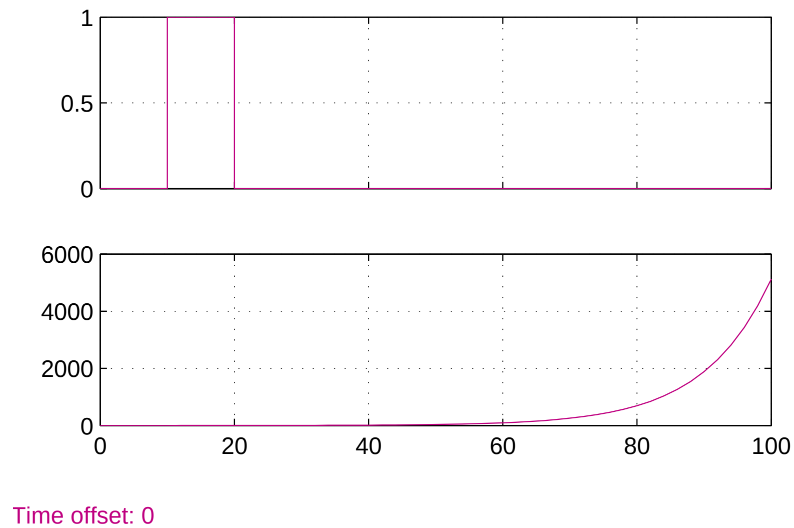


Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable

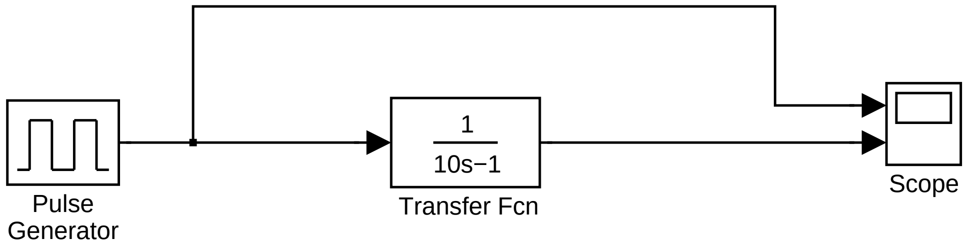


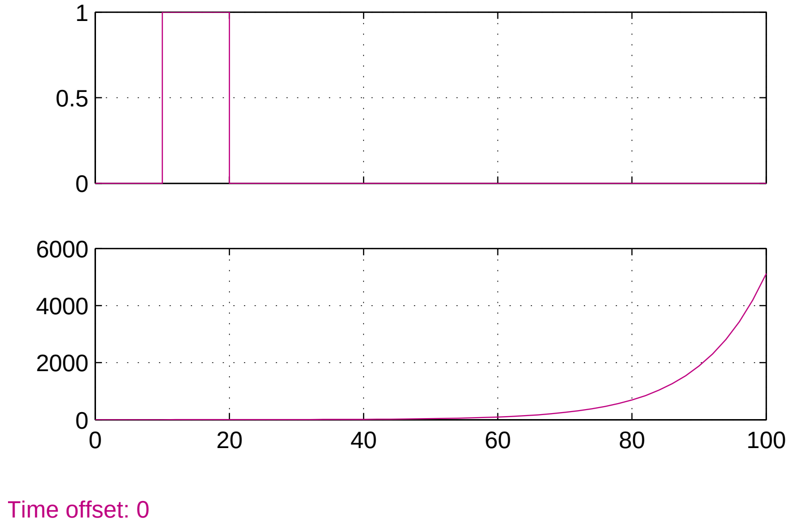


Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable





Pourquoi ?

Stabilité - définitions

Un état d'équilibre est un point X_e t.q. si en l'absence de commande et de perturbations on a :

$$X(t_0) = X_e \Longleftrightarrow X(t) = X_e, t \geq t_0$$

Pour un système $X'(t) = F(X(t), U(t))$, les points d'équilibre sont les solutions de l'équation algébrique $0 = F(X(t), 0)$.

Un système linéaire $X'(t) = AX(t)$ peut avoir

- Un point d'équilibre unique $X = 0$ si A est inversible
- Une infinité de points d'équilibre si A n'est pas inversible

L'état d'équilibre X_e est

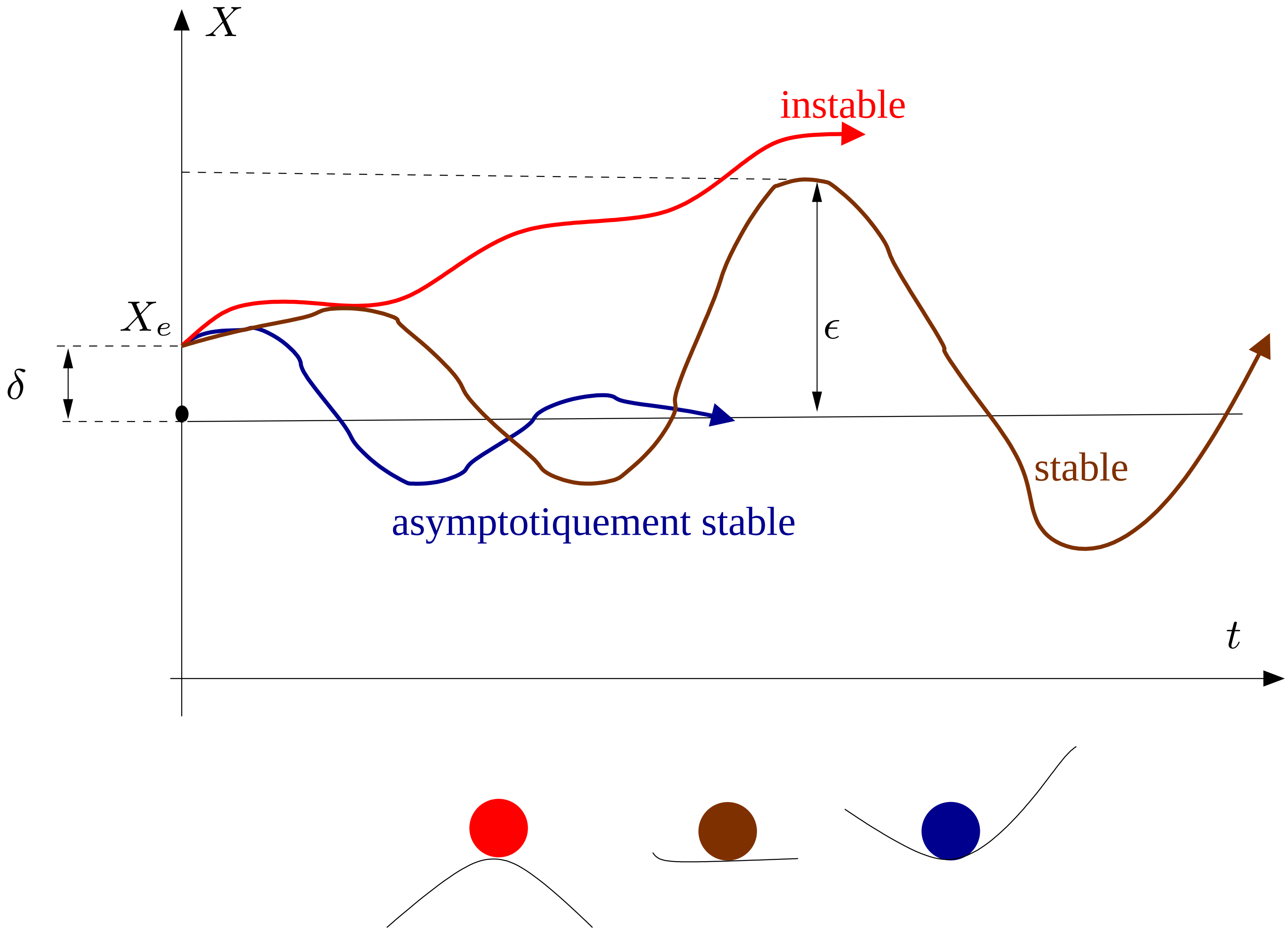
- stable si

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : ||X(0) - X_e|| < \delta \Rightarrow ||X(t) - X_e|| < \epsilon.$$

- asymptotiquement stable si

$$\forall \delta > 0 : ||X(0) - X_e|| < \delta \Rightarrow lim_{t \to \infty} X(t) = X_e.$$

Stabilité - illustration



Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec λ à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec λ à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

Exemple : $\dfrac{1}{10s+1}$

Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec λ à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

Exemple : $\dfrac{1}{10s+1}$

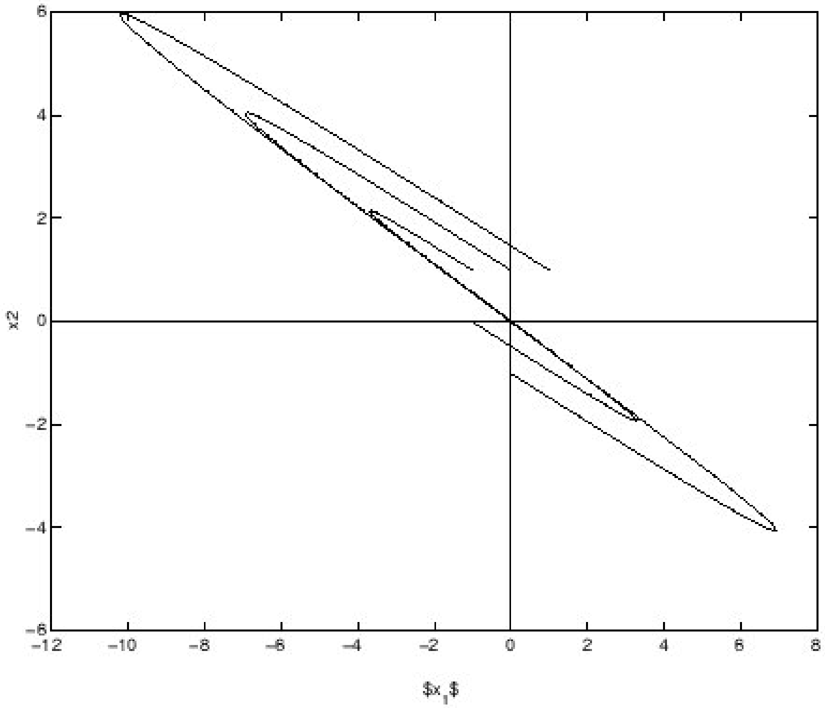
il y a un seul pôle de valeur $-\dfrac{1}{10}$ réelle négative : le système est asymptotiquement stable

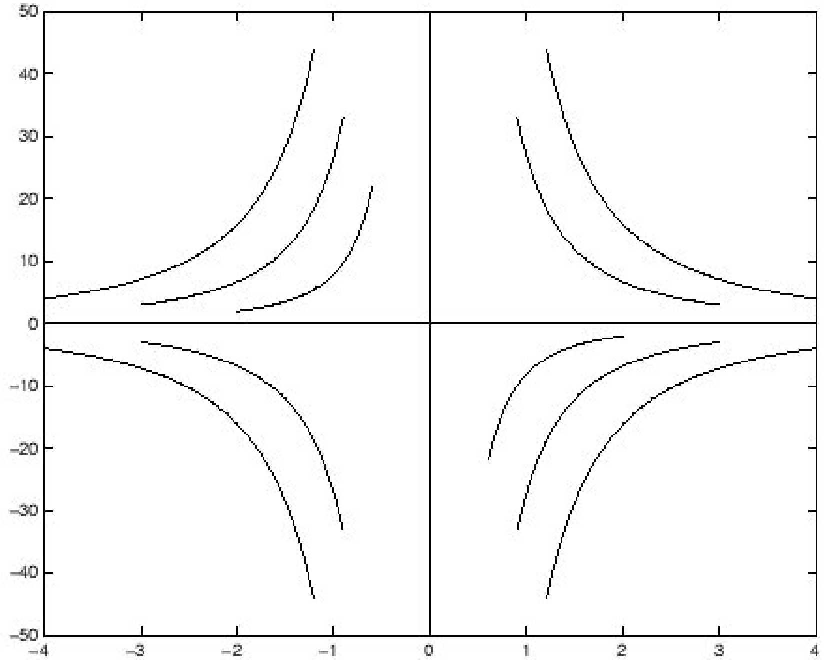
Nature des points d'équilibre

Cas 1 : λ_1 et λ_2 sont réels

– si λ_1 et λ_2 sont du même signe, le point **0** est un noeud stable ou instable

– si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, le point **0** est un point-selle (col) instable



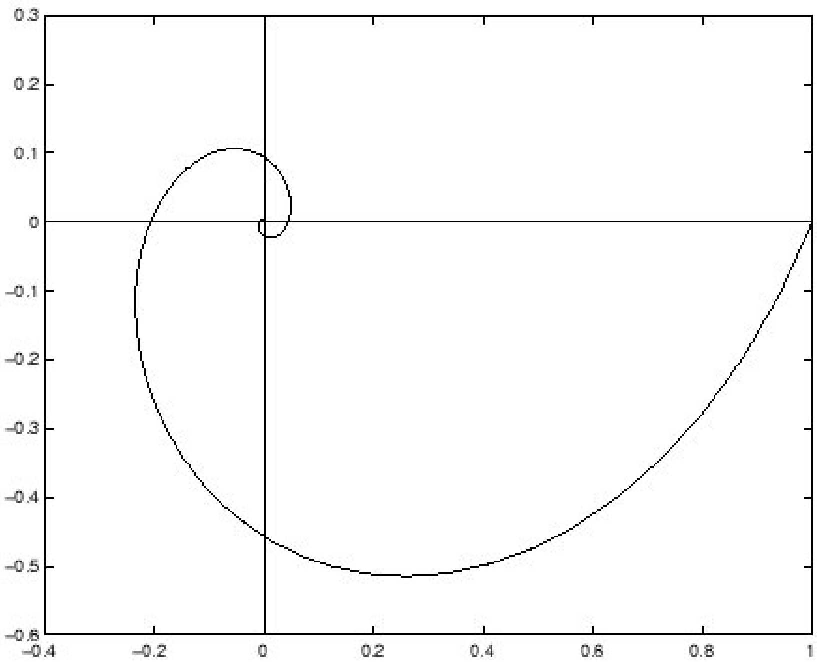


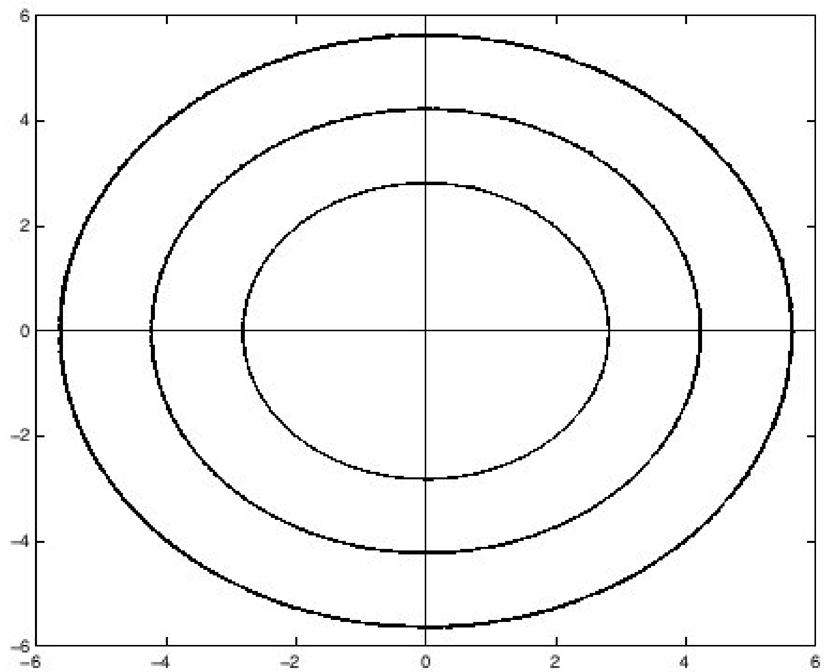
Nature des points d'équilibre (suite)

Cas 2 : $\lambda_1 = \rho + j\omega$ et $\lambda_2 = \rho - j\omega$

– si $\rho \neq 0$, le point **O** est un foyer stable ou instable

– si $\rho = 0$, le point **O** est un centre





Stabilisation par feed-back

Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

- Pourquoi ?

Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

- Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :

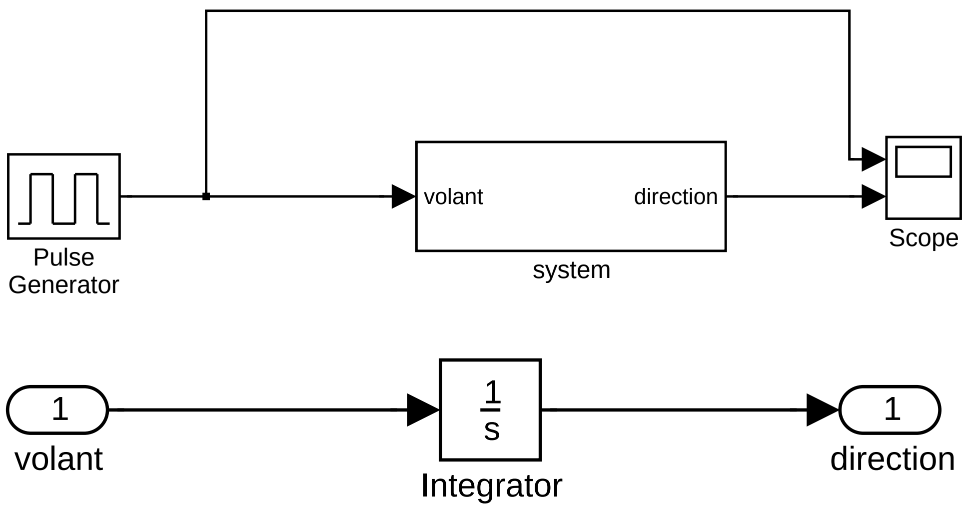
Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

- Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :



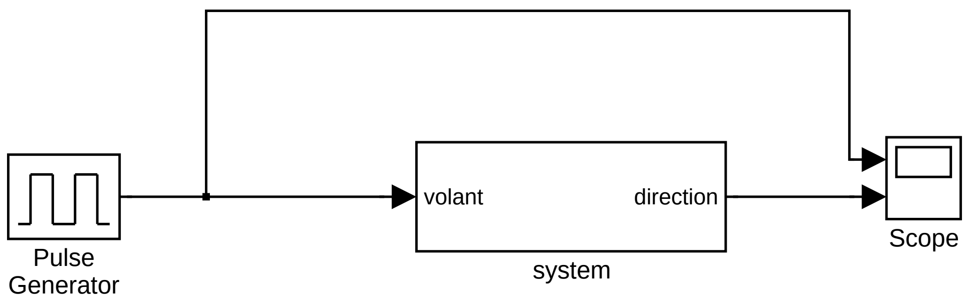
Stabilisation par feed-back

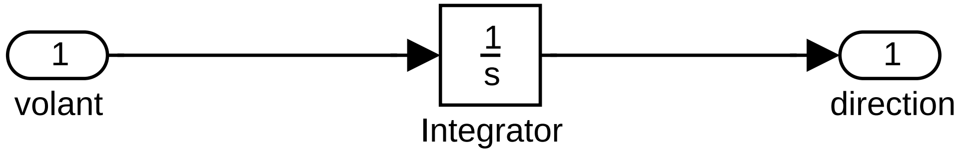
Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

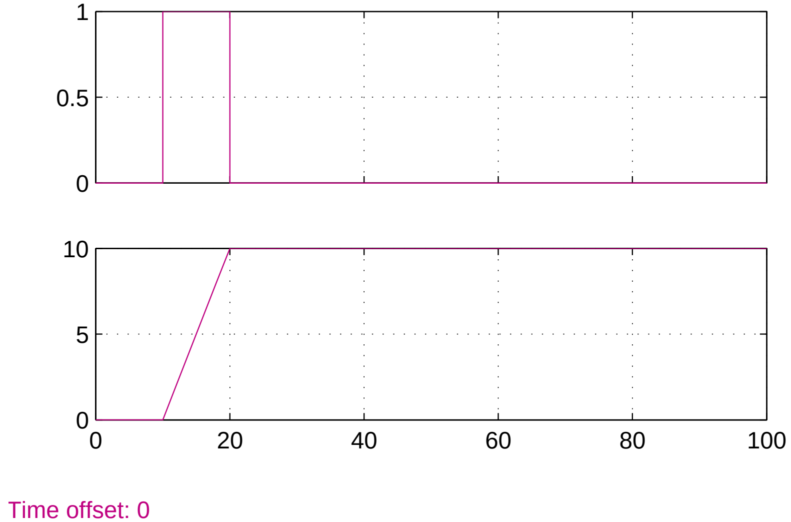
- Non

- Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :







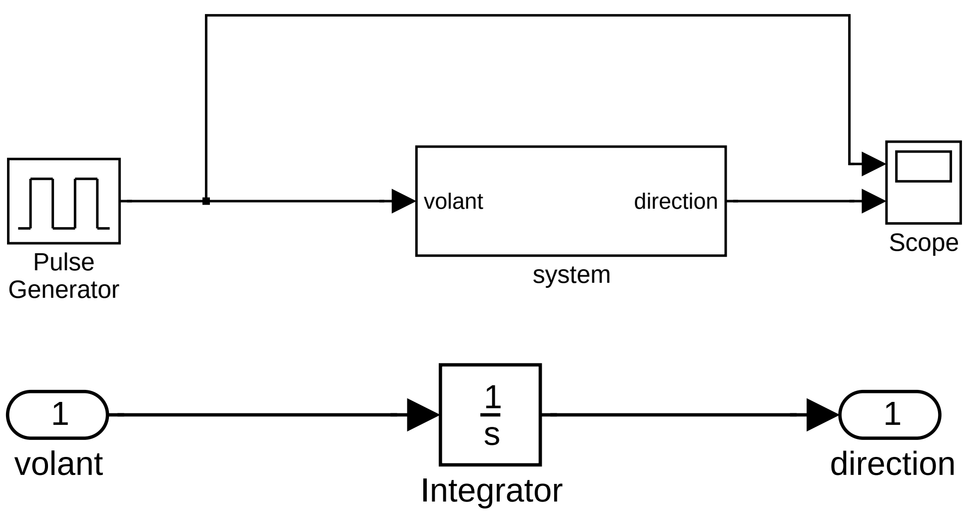
Stabilisation par feed-back

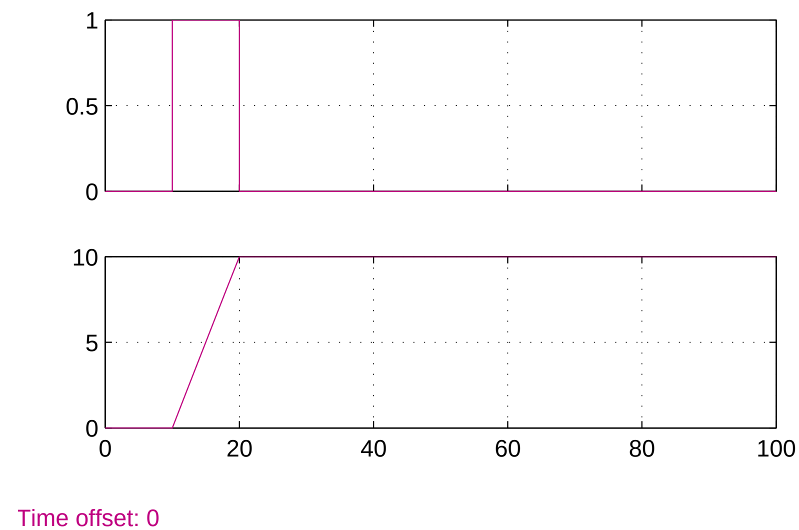
Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

- Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :





Le pôle vaut 0 et n’est pas à partie réelle négative

Stabilisation par feed-back

Solution :

Stabilisation par feed-back

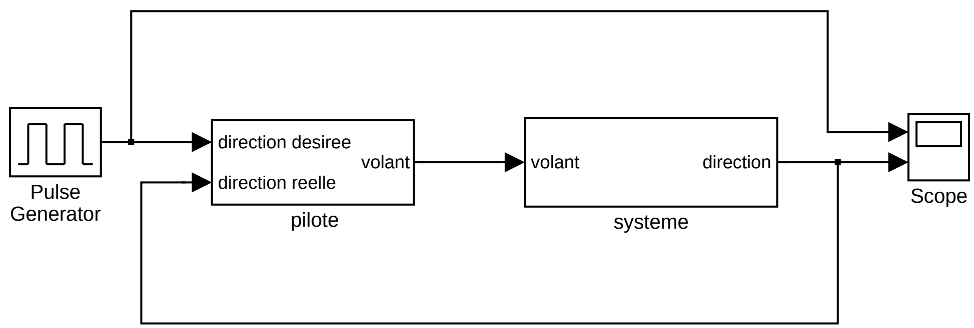
Solution :

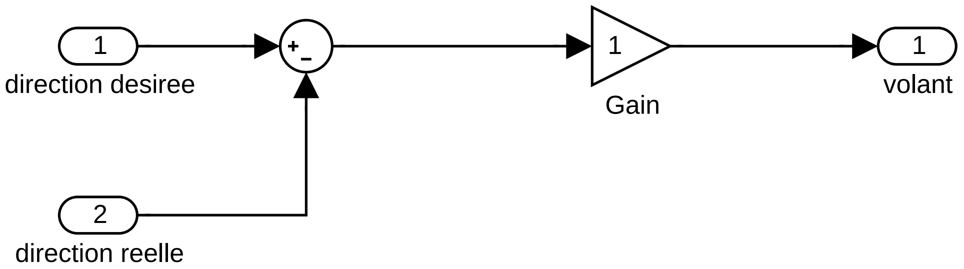
Conduire les yeux ouverts

Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts

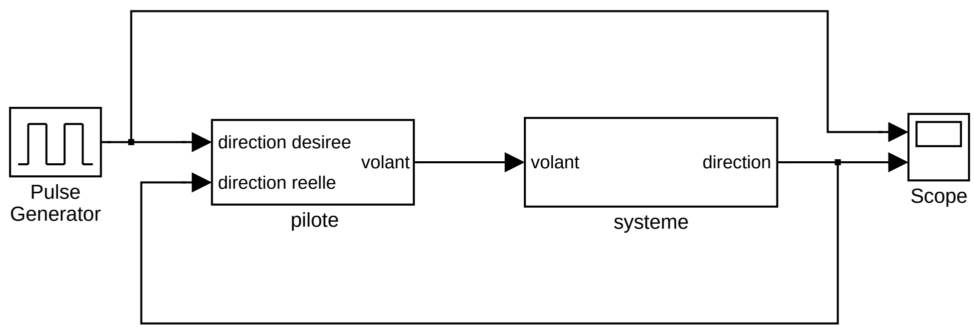


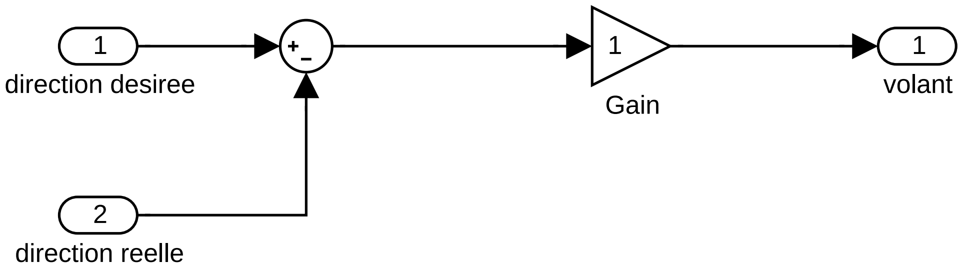


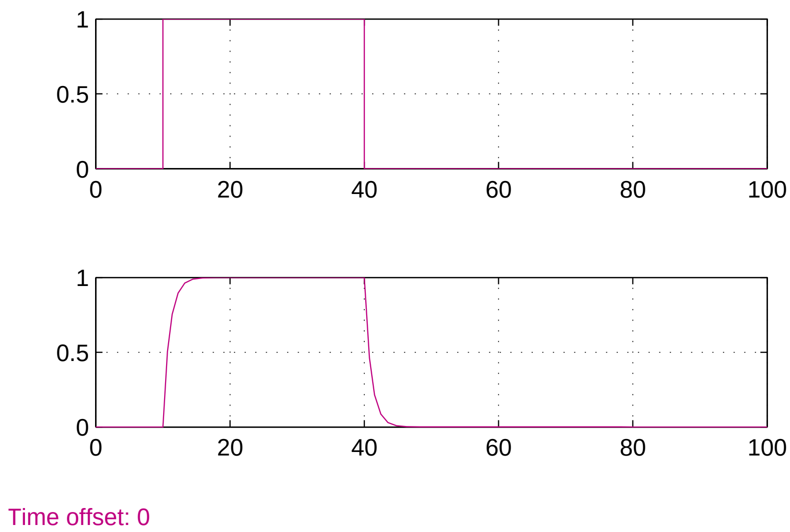
Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts



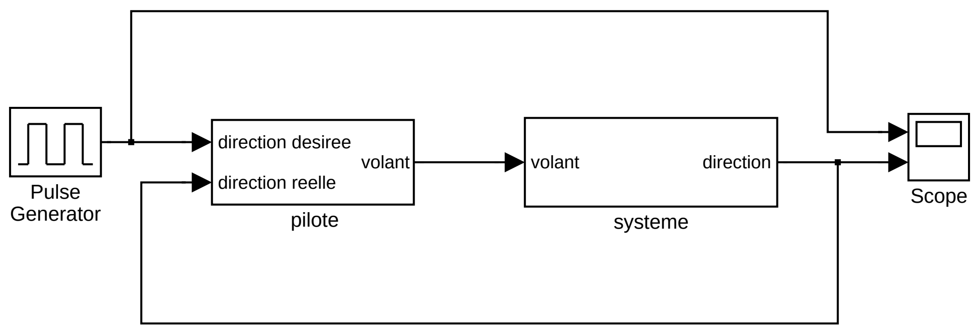


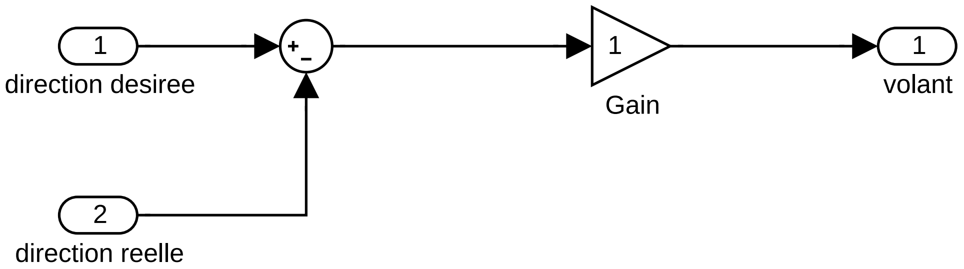


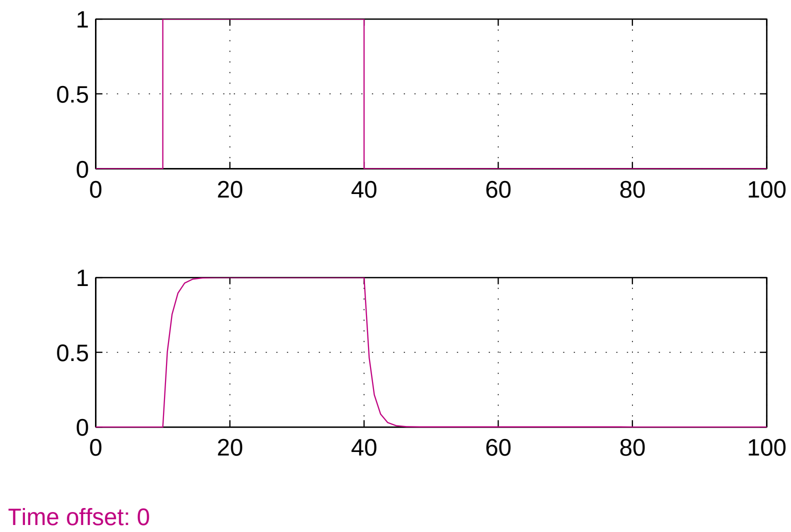
Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts







Pourquoi et comment ?

Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

Idée : calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$$E = D_d - D_r$$

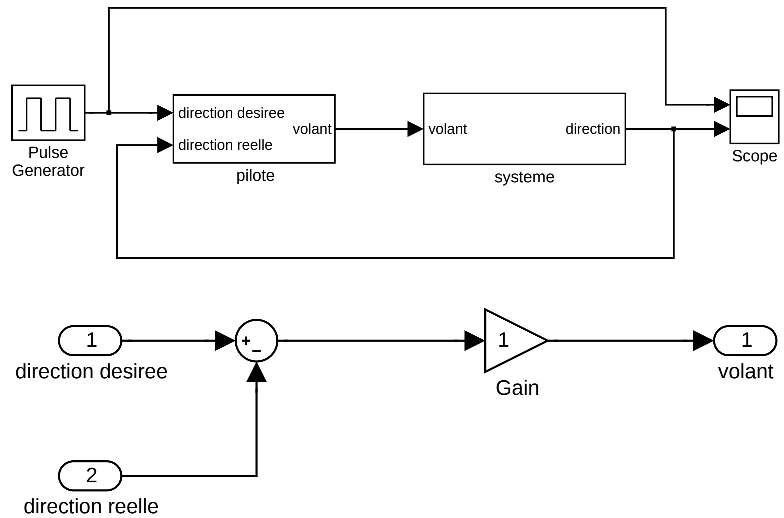
$$V = E$$

$$D_r(s) = \frac{1}{s} V(s)$$

$$D_r(s) = \frac{1}{s} V(s) = \frac{1}{s}(D_d(s) - D_r(s))$$

$$(1 + \frac{1}{s}) D_r(s) = \frac{1}{s} D_d(s)$$

$$D_r(s) = \frac{1}{s+1} D_d(s)$$



Stabilisation par feed-back

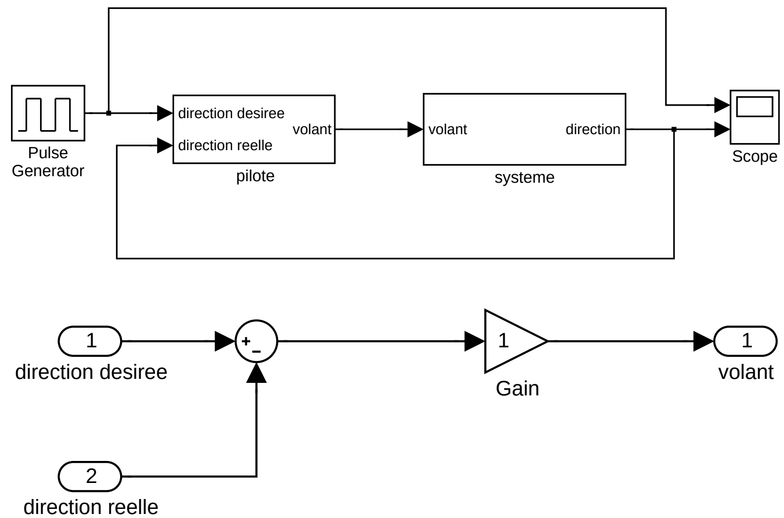
Pourquoi et comment ?

Idée : calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$$E = D_d - D_r$$

$$V = E$$

$$D_r(s) = \frac{1}{s} V(s)$$



$$D_r(s) = \frac{1}{s} V(s) = \frac{1}{s}(D_d(s) - D_r(s))$$

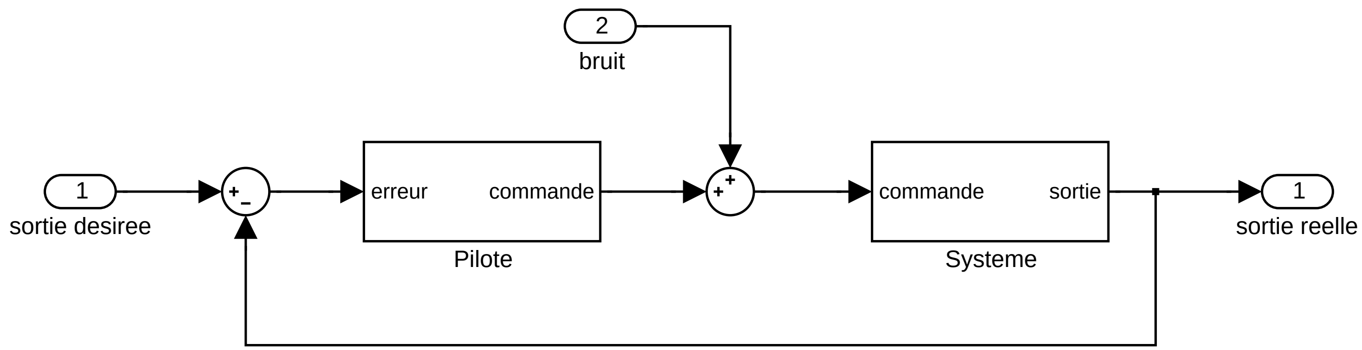
$$(1 + \frac{1}{s}) D_r(s) = \frac{1}{s} D_d(s)$$

$$D_r(s) = \frac{1}{s+1} D_d(s)$$

Le pôle vaut -1 et est à partie réelle négative : le système piloté est stable

Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



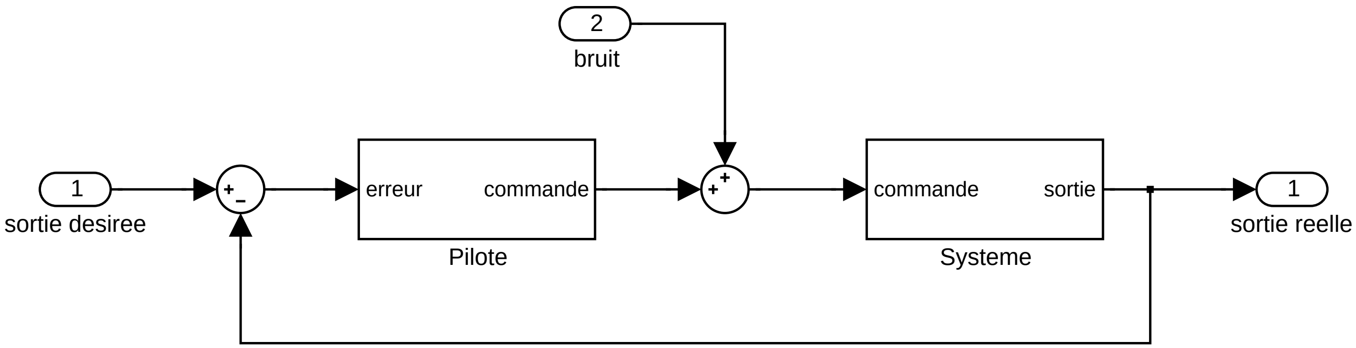
où

– le bruit (b) représente les perturbations et les erreurs de modélisation

– le pilote et le système sont supposés rationnels ($P(s), S(s)$)

Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



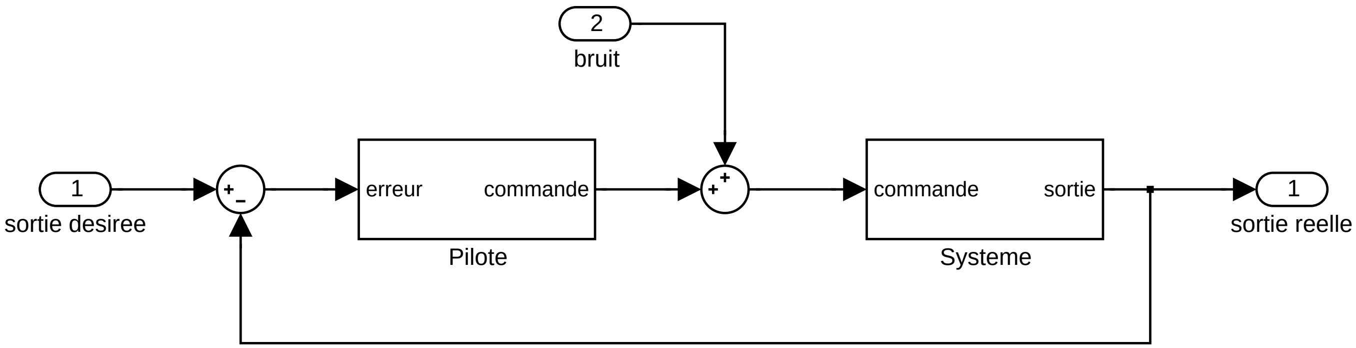
Calculons symboliquement le système :

$$S_r = S(P(S_d - S_r) + B)$$

$$(1 + SP)S_r = S(PS_d + B)$$

Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



Calculons symboliquement le système :

$$S_r = S(P(S_d - S_r) + B)$$

$$(1 + SP)S_r = S(PS_d + B)$$

$$\boxed{S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B}$$

Problème de la commande automatique

Problème de la commande automatique

$$\boxed{S_r = \frac{SP}{1+SP} S_d + \frac{S}{1+SP} B}$$

Problème de la commande automatique

$$\boxed{S_r = \frac{SP}{1+SP} S_d + \frac{S}{1+SP} B}$$

étant donné S, trouver P tel que

Problème de la commande automatique

$$\boxed{S_r = \frac{SP}{1+SP} S_d + \frac{S}{1+SP} B}$$

étant donné S, trouver P tel que

1. $\dfrac{SP}{1+SP}$ soit stable et proche de l'identité

   fidélité

Problème de la commande automatique

$$\boxed{S_r = \frac{SP}{1+SP}S_d + \frac{S}{1+SP}B}$$

étant donné S, trouver P tel que

1. $\dfrac{SP}{1+SP}$ soit stable et proche de l'identité

   fidélité

2. $\dfrac{S}{1+SP}$ soit petit

   robustesse (rejet des perturbations)

Commande PID

Un pilote PID élabore la commande $u(t)$ à partir de l'écart $e(t)$ entre la sortie réelle et la sortie désirée en ajoutant 3 effets :

– Proportionnel (à l'écart)
– Intégral : si l'écart est positive, il faut continuer à augmenter la commande pour le réduire.
– Dérivé : dès que la sortie réelle varie, il faut modifier la commande sans attendre qu'un écart important existe.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

La fonction de transfert du pilote : $P(s) = \dfrac{U(s)}{E(s)} = K_p + \dfrac{K_i}{s} + K_d s$. En pratique l'effet dérivé doit être filtré pour éviter de dégrader le rapport signal/bruit de la commande :

$$P(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + K_f s} = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{s(1 + K_f s)}$$

Commande PID

Un pilote PID élabore la commande $u(t)$ à partir de l'écart $e(t)$ entre la sortie réelle et la sortie désirée en ajoutant 3 effets :

– Proportionnel (à l'écart)

– Intégral : si l'écart est positive, il faut continuer à augmenter la commande pour le réduire.

– Dérivé : dès que la sortie réelle varie, il faut modifier la commande sans attendre qu'un écart important existe.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

La fonction de transfert du pilote : $P(s) = \dfrac{U(s)}{E(s)} = K_p + \dfrac{K_i}{s} + K_d s$. En pratique l'effet dérivé doit être filtré pour éviter de dégrader le rapport signal/bruit de la commande :

$$P(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + K_f s} = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{s(1 + K_f s)}$$

Concevoir un pilote PID = déterminer ses coefficients

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel $P = a$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel $P = a$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel $P = a$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2 + a$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel $P = a$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2 + a$

C'est un polynôme du 2ème degré : les racines sont imaginaires pures

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel $P = a$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1 + SP}$

$D = s^2 + a$

C'est un polynôme du 2ème degré : les racines sont imaginaires pures

pas stable ! ! !

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1 + SP}$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2(cs+d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$$D = s^2(cs+d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2(cs+d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

On choisit des racines stables :

$(s+1)(s-e^{\frac{3i\pi}{4}})(s-e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2+\sqrt{2}s+1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2(cs+d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

On choisit des racines stables :

$(s+1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$

On identifie : $c = 1, d = 2.4, a = 2.4, b = 1$

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote proportionnel, différentiel $P = \dfrac{as+b}{cs+d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2(cs+d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$

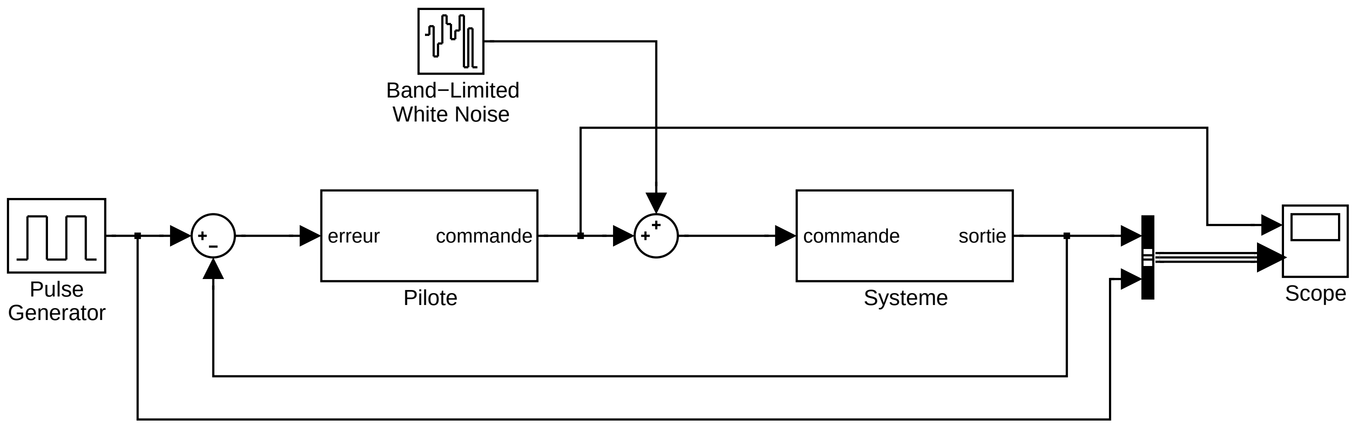
C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

On choisit des racines stables :
$(s+1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$

On identifie : $c = 1, d = 2.4, a = 2.4, b = 1$

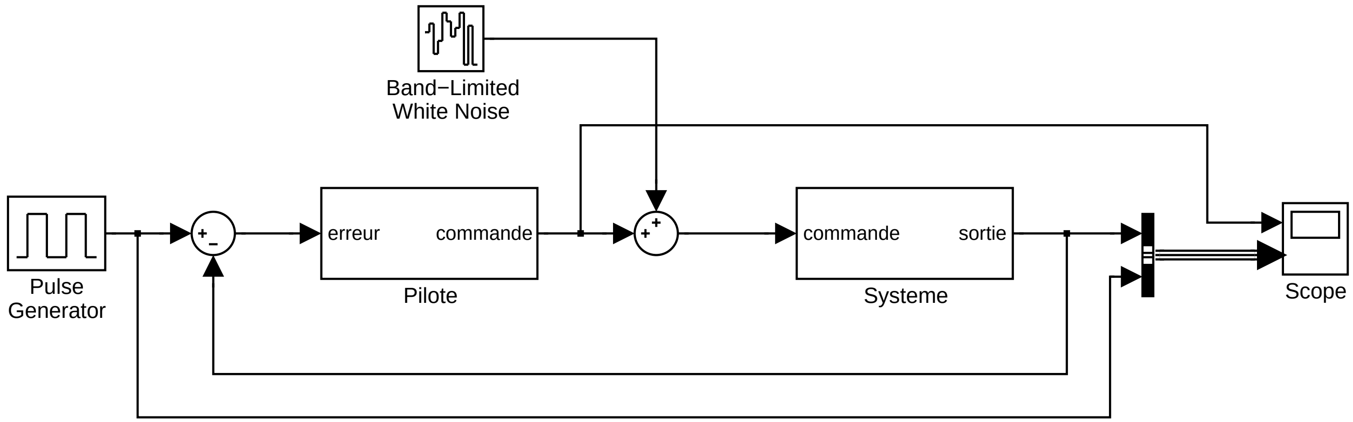
on essaie

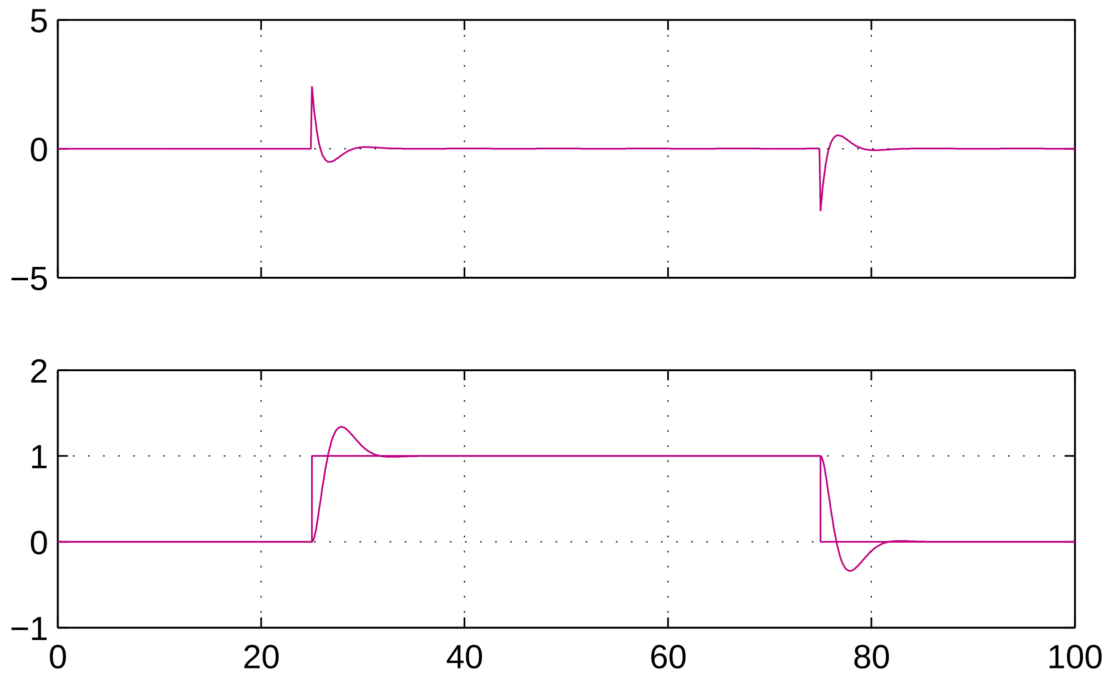
Simulation



Band−Limited
White Noise
Pulse
Generator
erreur
commande
Pilote
commande
sortie
Systeme
Scope

Simulation





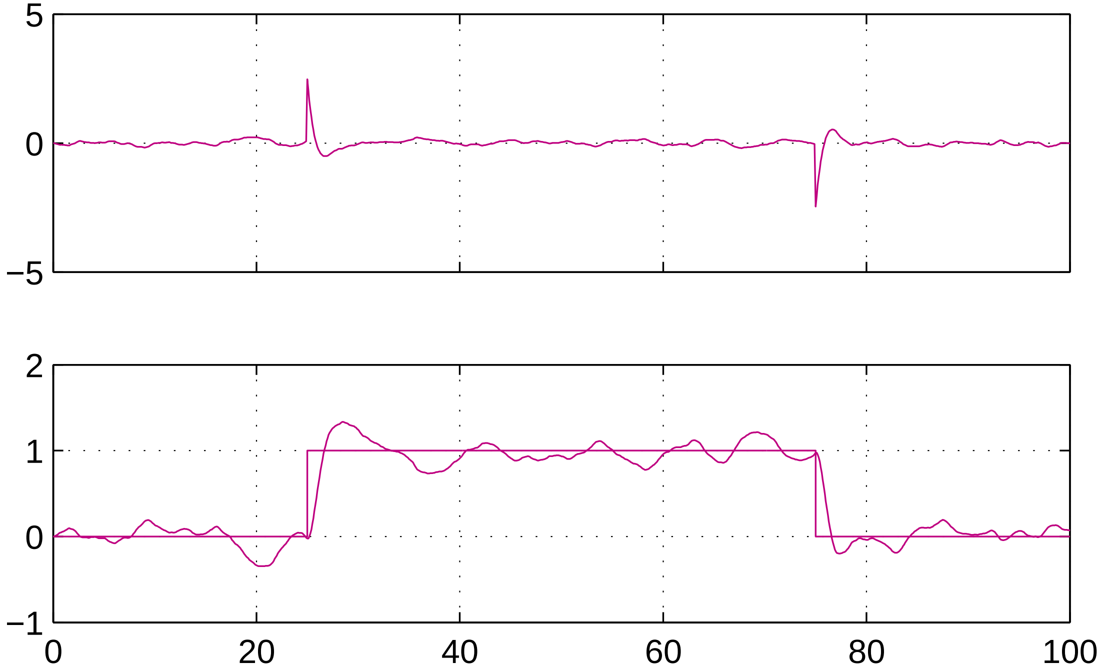
Time offset: 0

Simulation

Avec perturbation

Simulation

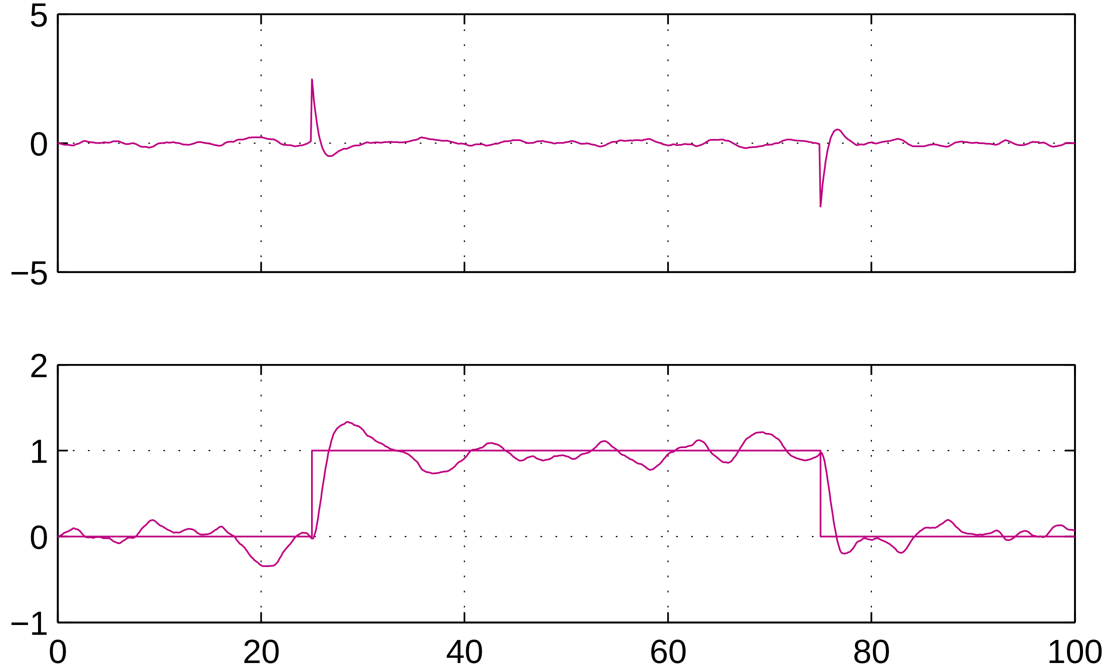
Avec perturbation



Time offset: 0

Simulation

Avec perturbation



Time offset: 0

Pas terrible

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

Rejet de perturbations

On calcule $\frac{S}{1+SP} = \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s \to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

$$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$$

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

$$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer $\dfrac{d}{b}$

Rejet de perturbations

On calcule $\frac{S}{1+SP} = \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

$$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer $\frac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

$$(s+1)(s-2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s-2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2+2\sqrt{2}s+4) = s^3+3.8s^2+6.8s+4$$

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

$$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer $\dfrac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

$$(s+1)(s-2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s-2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2+2\sqrt{2}s+4) = s^3+3.8s^2+6.8s+4$$

On identifie : $c=1, d=3.8, a=6.8, b=4$

Rejet de perturbations

On calcule $\frac{S}{1+SP} = \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$

$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$

Idée : diminuer $\frac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

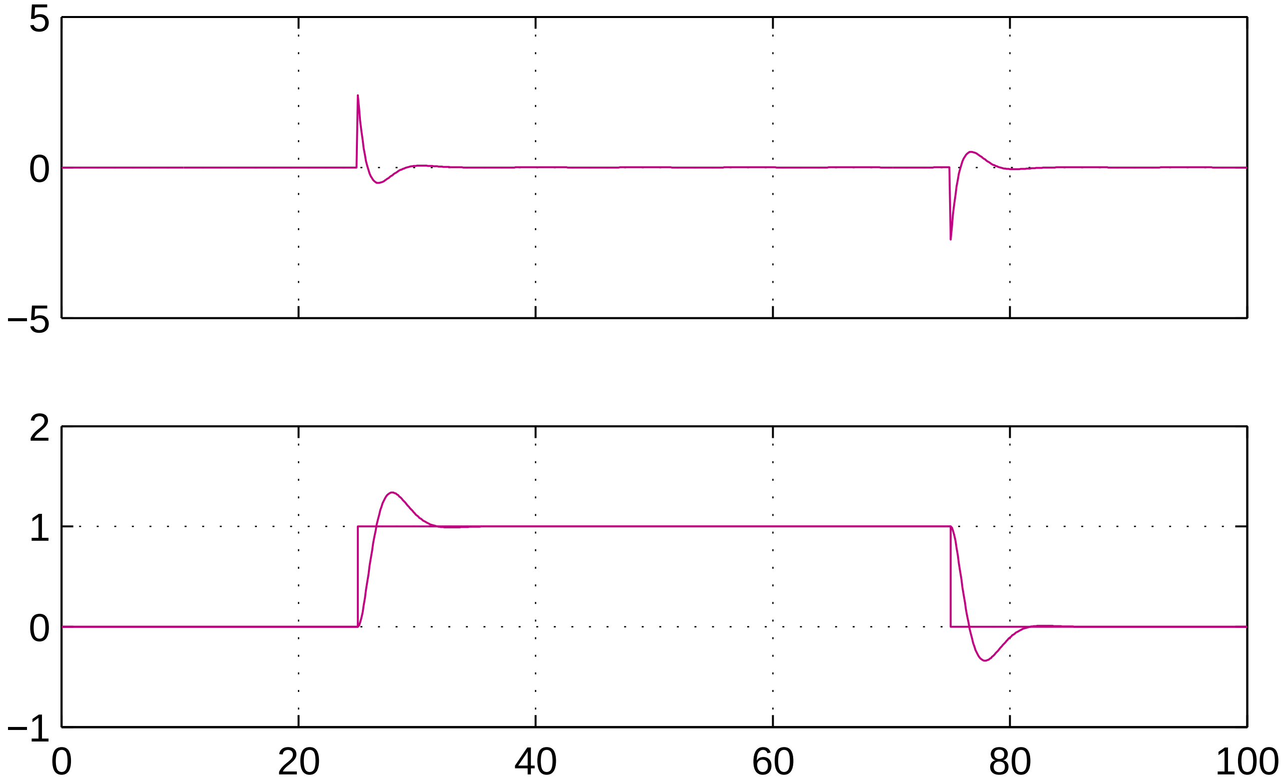
$(s+1)(s-2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s-2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2+2\sqrt{2}s+4) = s^3+3.8s^2+6.8s+4$

On identifie : $c=1, d=3.8, a=6.8, b=4$

on essaie

Sans perturbation

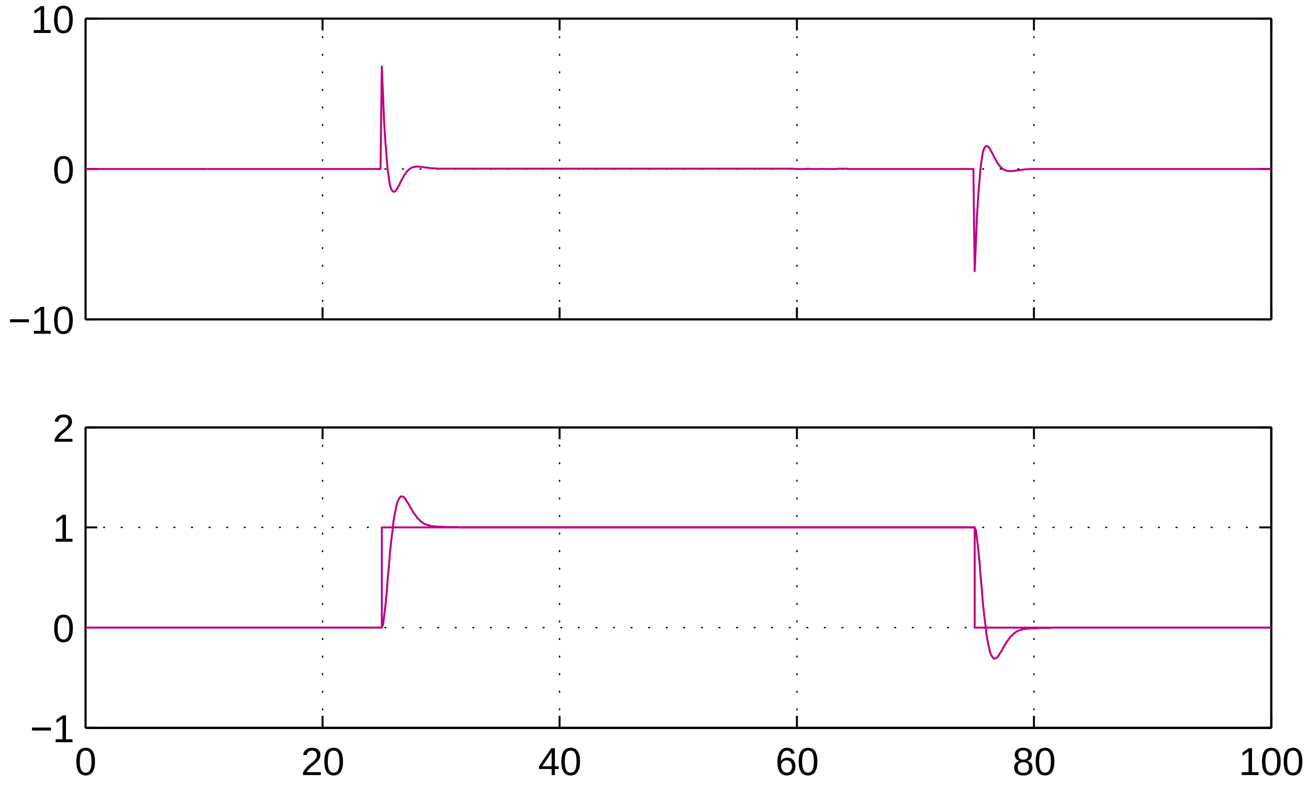
Avant



Time offset: 0

Sans perturbation

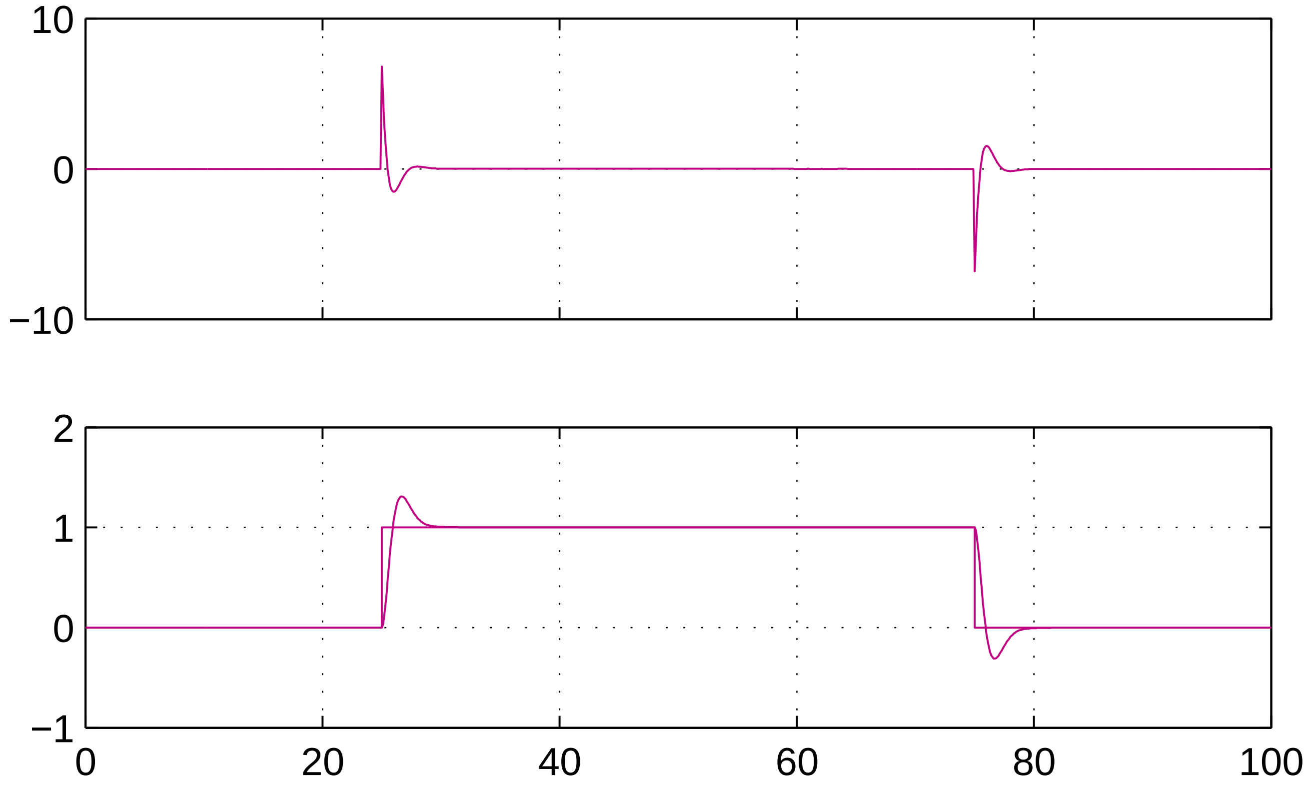
Après



Time offset: 0

Sans perturbation

Après

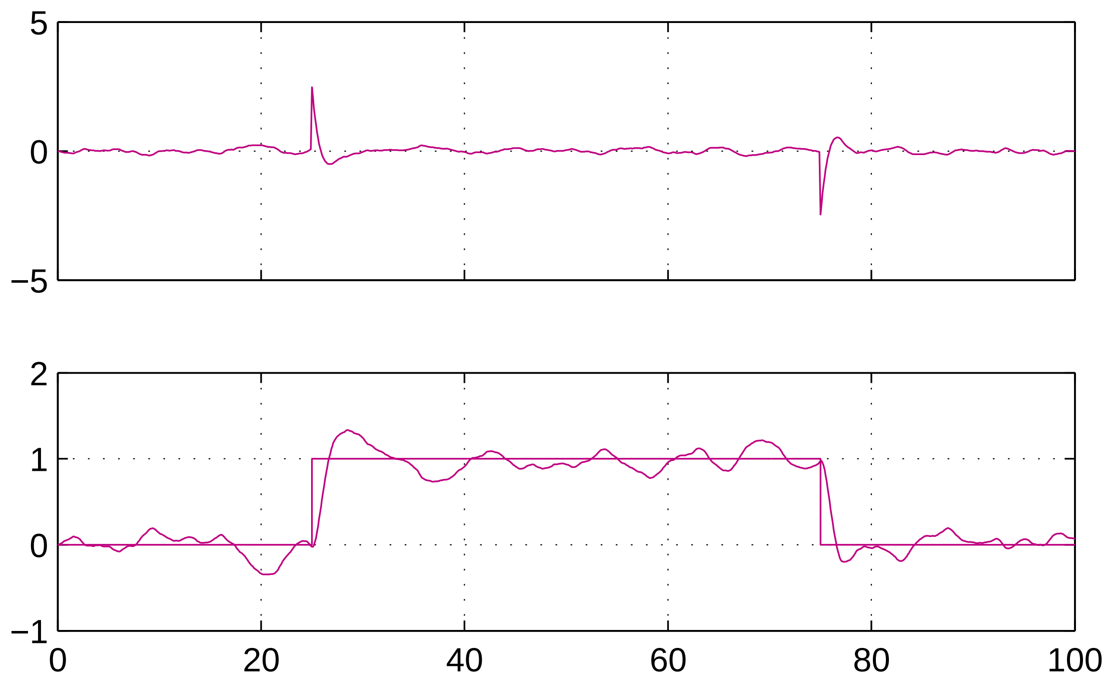


Time offset: 0

Pareil

Avec perturbation

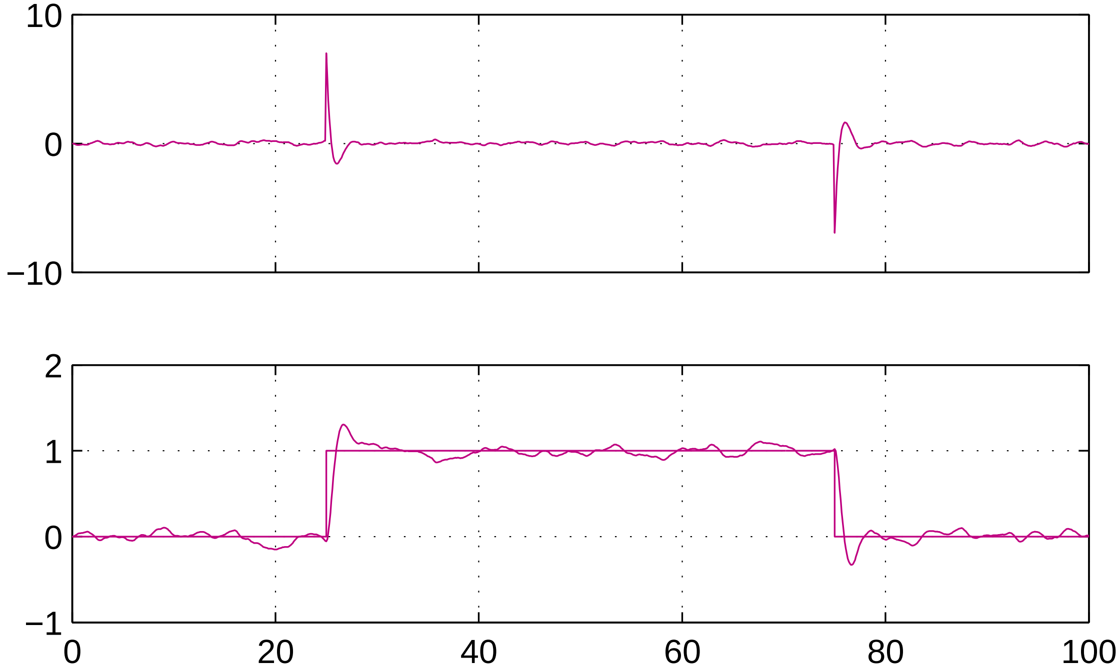
Avant



Time offset: 0

Avec perturbation

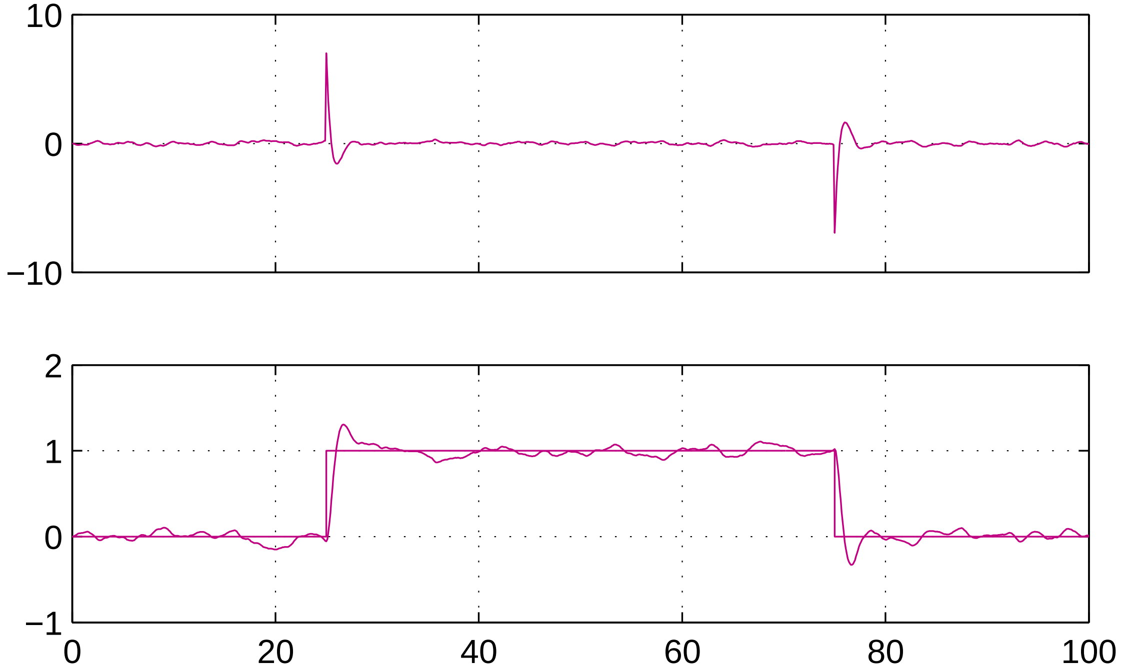
Après



Time offset: 0

Avec perturbation

Après

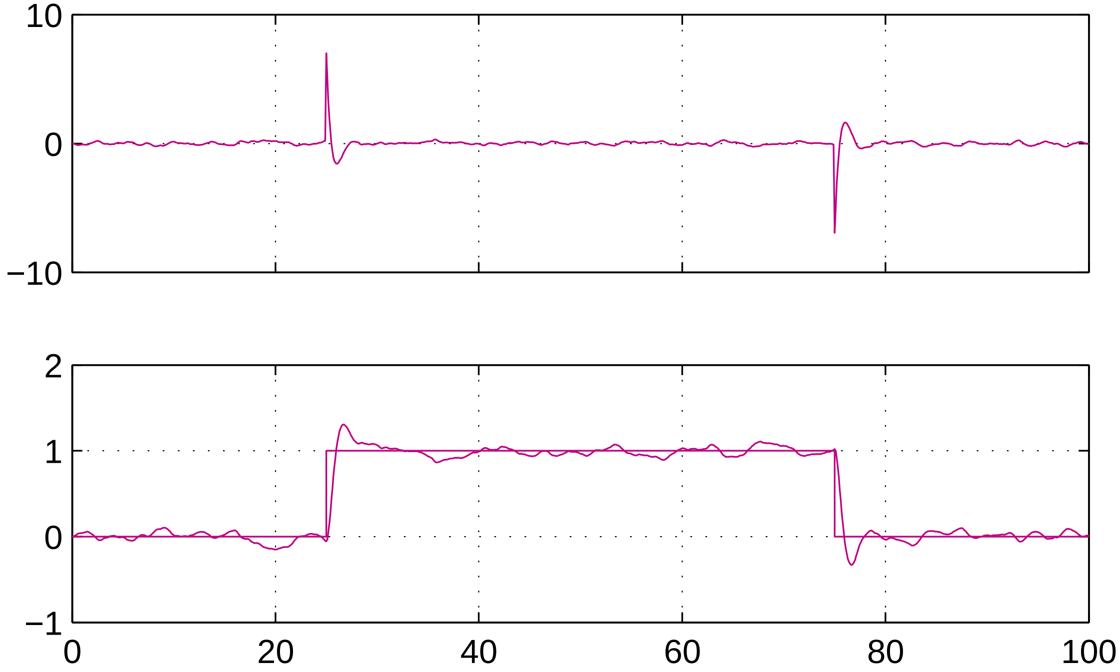


Time offset: 0

Meilleur

Avec perturbation

Après



Time offset: 0

Meilleur

On est content

Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

exemple :

	système	instable
+	pilote	stable
	système composé	stable

Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

exemple :

	système	instable
+	pilote	stable
	système composé	stable

Tous les cas de figure sont possibles

Il faut faire attention

Sinus et cosinus

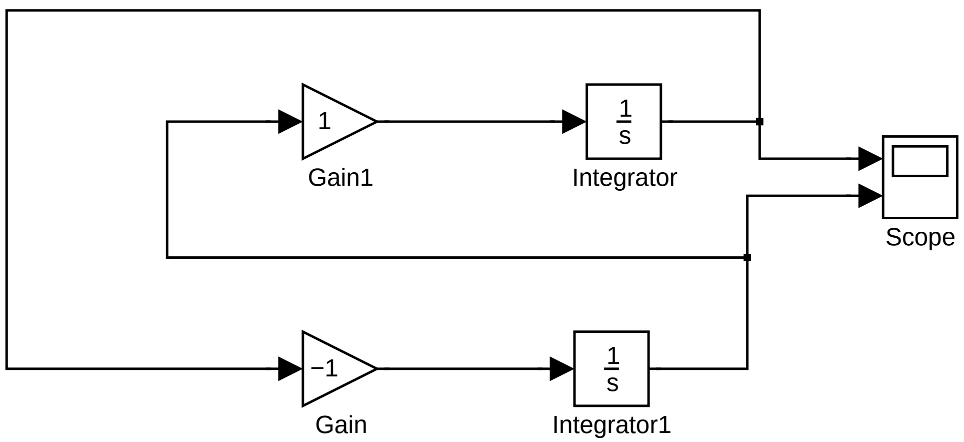
$$x' = y$$

$$y' = -x$$

Sinus et cosinus

$$x' = y$$

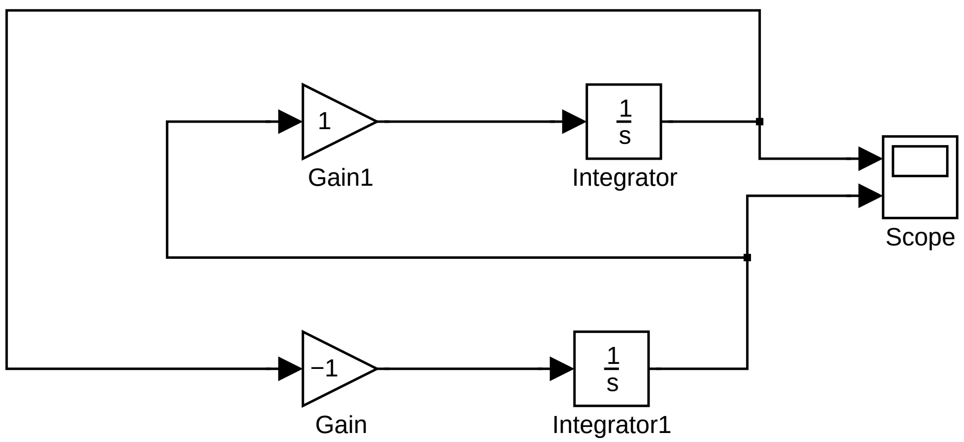
$$y' = -x$$

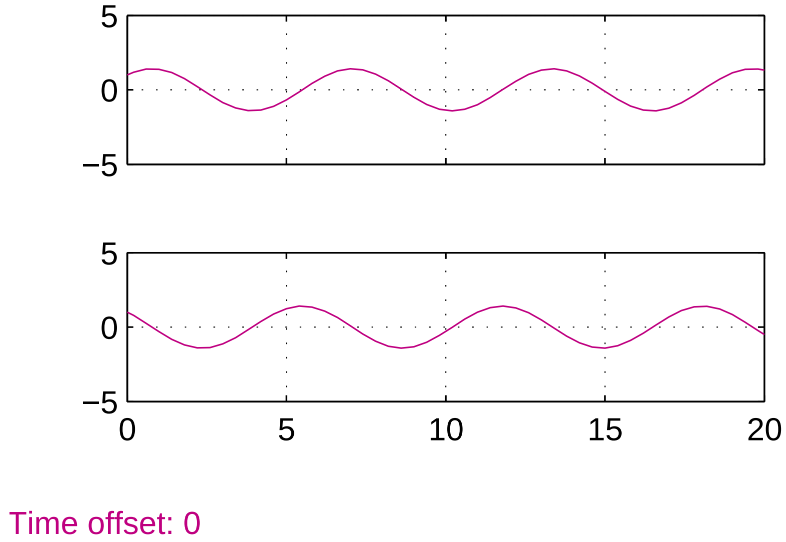


Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

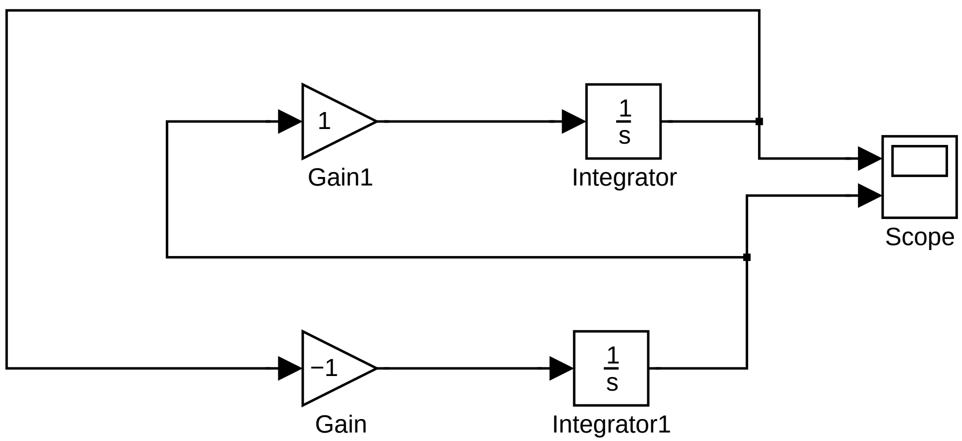


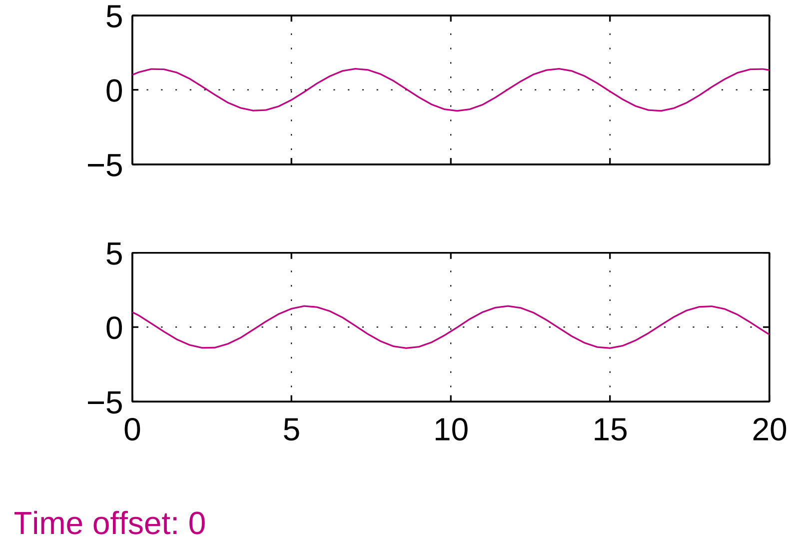


Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$





Phénomème oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov

Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while(c) I;` termine ?

Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while(c) I;` termine ?

Trouver une fonction entière `t` de la mémoire du programe, telle que :

1. il existe un entier `k` avec

```
{t < k} => {not c}
```

Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while(c) I;` termine ?

Trouver une fonction entière `t` de la mémoire du programe, telle que :

1. il existe un entier `k` avec

   ```
   {t < k} => {not c}
   ```

2. `t` décroît au cours de la boucle :

   ```
   [I] {t = n} => {t < n}
   ```

Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while(c) I;` termine ?

Trouver une fonction entière `t` de la mémoire du programe, telle que :

1. il existe un entier `k` avec

   `{t < k} => {not c}`

2. `t` décroît au cours de la boucle :

   `[I] {t = n} => {t < n}`

   (*où* `[I] {t = n}` *est la plus faible pré-condition du prédicat* `{t = n}` *par le programme* `[I]`)

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système S (linéaire ou non-linéaire) :

$$X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » $\mathcal{E}$ telle que

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système S (linéaire ou non-linéaire) :

$$X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » $\mathcal{E}$ telle que

1. Il existe un minimum e : $\forall X \; \mathcal{E}(X) > e$

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système S (linéaire ou non-linéaire) :

$$X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » $\mathcal{E}$ telle que

1. Il existe un minimum e : $\forall X\ \mathcal{E}(X) > e$
2. $\mathcal{E}$ décroît strictement le long des trajectoires de S :

$$\forall X\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X}(X).F(X) < 0$$

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système S (linéaire ou non-linéaire) :

$$X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » $\mathcal{E}$ telle que

1. Il existe un minimum e : $\forall X \, \mathcal{E}(X) > e$
2. $\mathcal{E}$ décroît strictement le long des trajectoires de S :

$$\forall X \, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X}(X).F(X) < 0$$

Pour un cycle limite :

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système S (linéaire ou non-linéaire) :

$$X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » $\mathcal{E}$ telle que

1. Il existe un minimum e : $\forall X\, \mathcal{E}(X) > e$
2. $\mathcal{E}$ décroît strictement le long des trajectoires de S :

$$\forall X\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X}(X).F(X) < 0$$

Pour un cycle limite :

$\mathcal{E}$ décroît le long des trajectoires de S :

$$\forall X\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X}(X).F(X) \leq 0$$

Méthode de Lyapunov - remarques

Remarques

- Le point d'énergie nulle est un point d'équilibre
- La stabilité asymptotique $\Rightarrow$ la convergence de l'énergie vers un minimum
- L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie

Avantages de la méthode de Lyapunov

- Applicable aux systèmes linéaire et non-linéaires
- Ne nécessite ni la solution de l'équation différentielle, ni la connaissance des pôles du système dans le cas linéaire
- On peut étudier la stabilité du système par un examen de l'énergie du système

Observation physique

- Si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue, alors le système devra rejoindre un point d'équilibre

Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$x' = y$

$y' = -x$

Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$x' = y$

$y' = -x$

$\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$x' = y$

$y' = -x$

$\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Condition de Lyapunov :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} y' \leq 0$$

Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$x' = y$

$y' = -x$

$\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Condition de Lyapunov :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} y' \leq 0$$

$2xy - 2yx \leq 0$

Sinus et cosinus

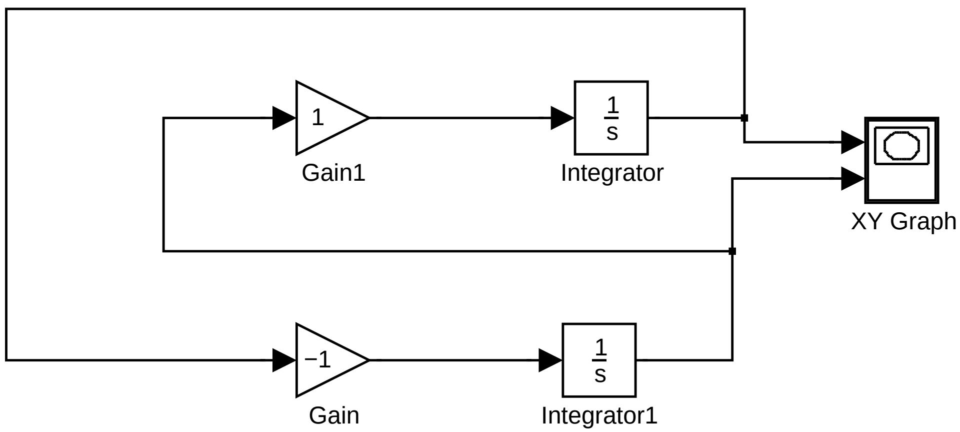
$$x' = y$$

$$y' = -x$$

Sinus et cosinus

$$x' = y$$

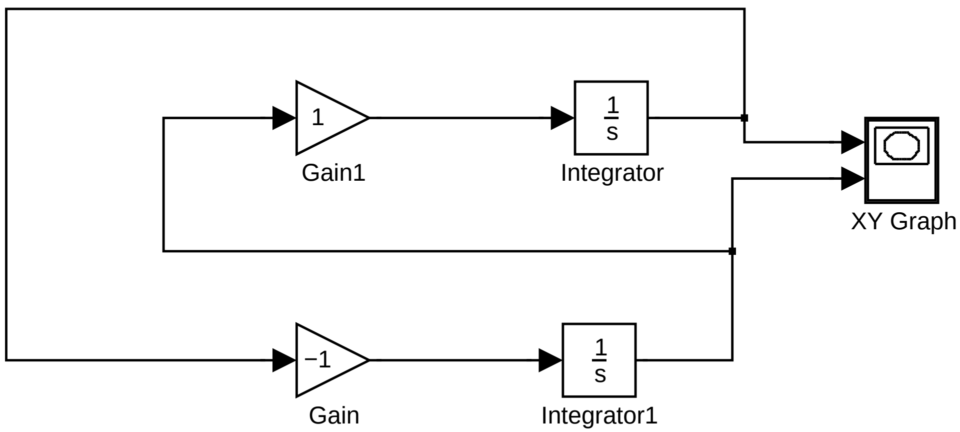
$$y' = -x$$

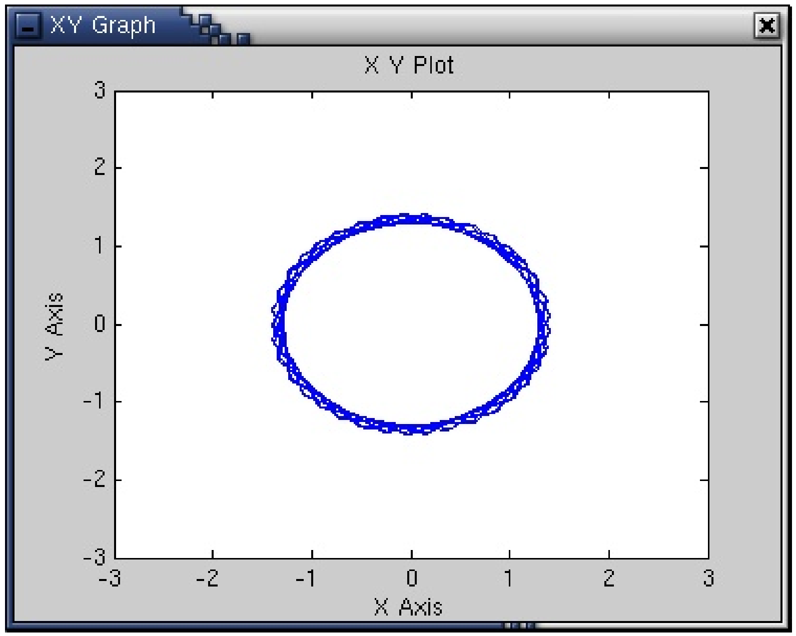


Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$





Phénomème oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov

Application aux systèmes linéaires

Considérons le système $X'(t) = AX(t)$ et une fonction candidate de Lyapunov quadratique : $\mathcal{E}(X) = X^T P X$

Le système est stable ssi

$$\forall Q = Q^T > 0 \ \exists P > 0 : A^T P + PA + Q = 0 \tag{1}$$

On va prouver que si la condition (1) implique la stabilité. Considérons la dérivée $\frac{dE(X)}{dt}$ le long des trajectoires :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}(X)}{dt} &= \frac{dX^T}{dt} PX + X^T P \frac{dX}{dt}, \\
&= (AX)^T PX + X^T PAX, \ \ (\text{car } dX/dt = X' = AX) \\
&= X^T A^T PX + X^T PAX = X^T(A^T P + PA)X, \\
&= X^T(-Q)x^T, \ \ (\text{car } A^T P + PA = -Q) \\
&= X^T(-Q)X < 0 \ \ (\text{car } Q > 0).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout X on a : (i) $\mathcal{E}(X)$ et ses dérivées partielles sont continues ; (ii) $\mathcal{E}(X) > 0$; (iii) $d\mathcal{E}(X)/dt < 0$. On peut donc conclure que le système est stable.