Echantillonnage

- construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;
- échantillonner le système à contrôler et construire un contrôleur échantillonné (théorie de la commande échantillonnée).

On a étudié l'erreur d'échantillonnage (liée au schémas d'intégration à pas constant)

On veut étudier la possibilté de reconstruire le signal continu original à partir du signal échantillonné.

Echantillonnage

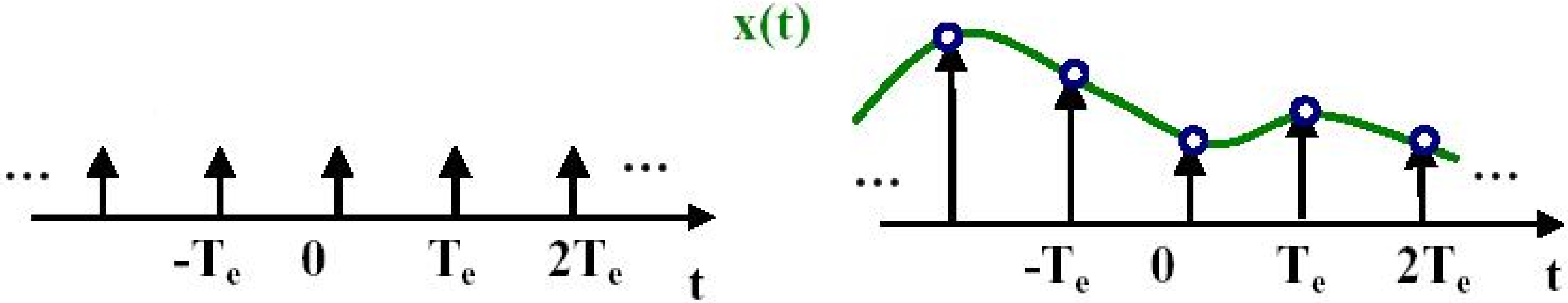
Une séquence $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ provient d'un échantillonnage d'un signal continu $x(t)$:

$$x_n = x(nT_e)$$

T_e est la période d'échantillonnage, $F_e = \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage.

Le signal échantillonné est :

$$x_d(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$



Signal à bande limitée

Signal à bande limitée

Un signal continu $x(t)$ est à bande limitée sur $[-B, B]$ si le support de sa transformée Fourier est inclu dans $[-B, B]$, c-a-d :

$$\forall f \in, |f| > B \Rightarrow \mathcal{F}x(f) = X(f) = 0$$

Fréquence Nyquist d'un signal continu x :

Soit F_{max} est la plus petite fréquence (lorsqu'elle existe) telle que x soit à bande limitée sur $[-F_{max}, F_{max}]$. Alors, la fréquence Nyquist de x est $2F_{max}$.

Théorème de Shannon-Nyquist

Soit $x(t)$ un signal continu à bande limitée, sa fréquence Nyquist est $2F_{max}$.

Alors un échantillonnage de x à la fréquence F_e permet la reconstruction complète du signal $\{x(t)\}_{t\in}$ à condition que $F_e/2 \geq F_{max}$.

Preuve : On utilise le signal $x_d(t)$

- D'abord, on examine la relation entre la transformée de Fourier $X_d(f)$ de $x_d(t)$ et celle $X(f)$ de $x(t)$
- Puis, on montre qu'il est possible de reconstruire $X(f)$ à partir de $X_d(f)$.

Relation entre $X_d(f)$ et $X(f)$

Un peigne Dirac $p_{T_e}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$. Sa transformée de Fourier est $P_{T_e}(f) = \frac{1}{T_e} p_{F_e}(f)$

Alors, $x_d(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$ est le produit $x(t)p_{T_e}(t)$.

Donc, la transformée de Fourier de $x_d(t)$ est $X_d(f) * P_{T_e}(f) = X_d(f) * (\frac{1}{T_e} p_{F_e}(f))$.

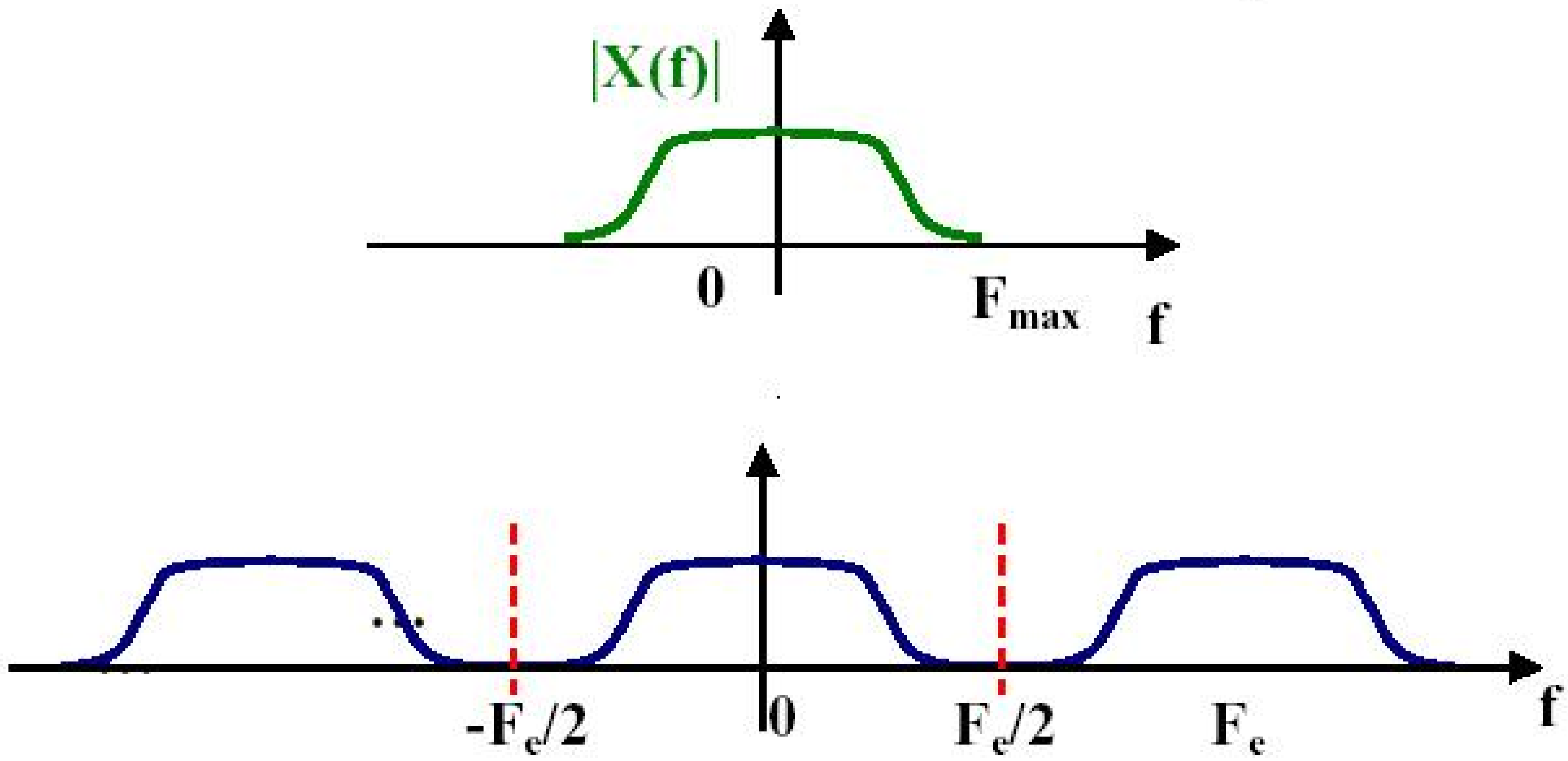
Puisque convoluer par un Dirac centré en nF_e revient à décaler de nF_e, on trouve :

$$X_d(f) = F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - nF_e).$$

Le spectre $X_d(f)$ du signal échantillonné $x_d(t)$ est **F_e-periodique** et correspond à la **périodisation** du spectre $X(f)$ du signal continu $x(t)$.

Relation entre $X_d(f)$ et $X(f)$ (suite)

Le spectre $X_d(f)$ du signal échantillonné $x_d(t)$ est **F_e-periodique** et correspond à la **périodisation** du spectre $X(f)$ du signal continu $x(t)$.



Reconstruction de $X(f)$ à partir de $X_d(f)$

$$X_d(f) = F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nF_e).$$

Supposons que $F_e/2 \geq F_{max}$. Donc, $\forall f, |f| \geq F_e/2 \Rightarrow X(f) = 0$.

Dans ce cas, la restriction de $X_d(f)$ à $[-F_e/2, F_e/2]$ est exactement $X(f)$ au facteur F_e près.

La reconstruction de $X(f)$ peut être résumée par :

$$X(f) = T_e Rect_{[-F_e/2, F_e/2]}(f) X_d(f)$$

Reconstruction de $x(t)$

La reconstruction $X(f) = T_e Rect_{[-F_e/2, F_e/2]}(f) X_d(f)$

La multiplication dans le domaine fréquentiel correspond à un filtrage par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/2$.

Soit $h(t) = sinc(\pi F_e t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre avec la transformée de Fourier $H(f) = T_e Rect_{[-F_e/2, F_e/2]}(f)$. Rappel : $sinc(y) = sin(y)/y$

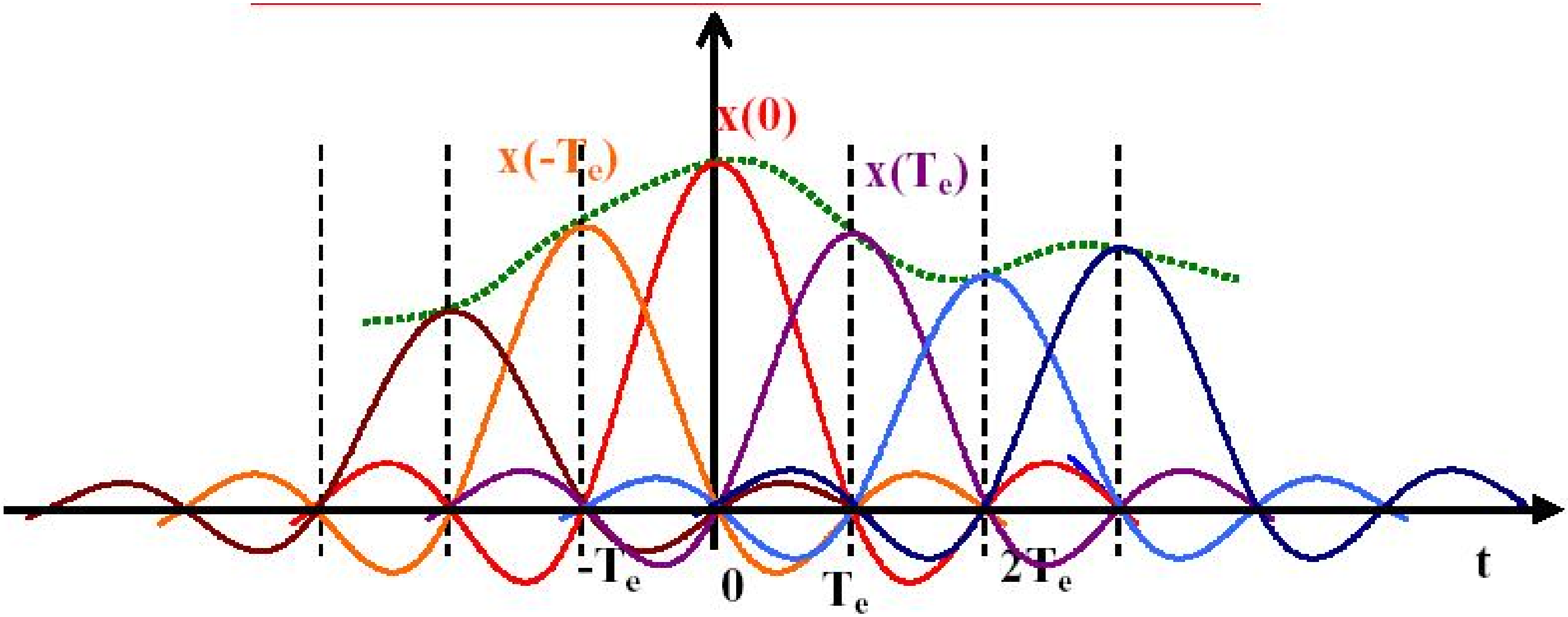
$$x_r(t) = h(t) * x_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) sinc(\pi(F_e t - n)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n sinc(\pi(F_e t - n))$$

Quand $F_e/2 \geq F_{max}$, toute les valeurs de $x(t)$ sont reconstituables à partir de l'ensemble discret $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, à condition que $F_{max} \leq F_e/2 \Rightarrow$ Cela conclut la preuve du théorème de Shannon.

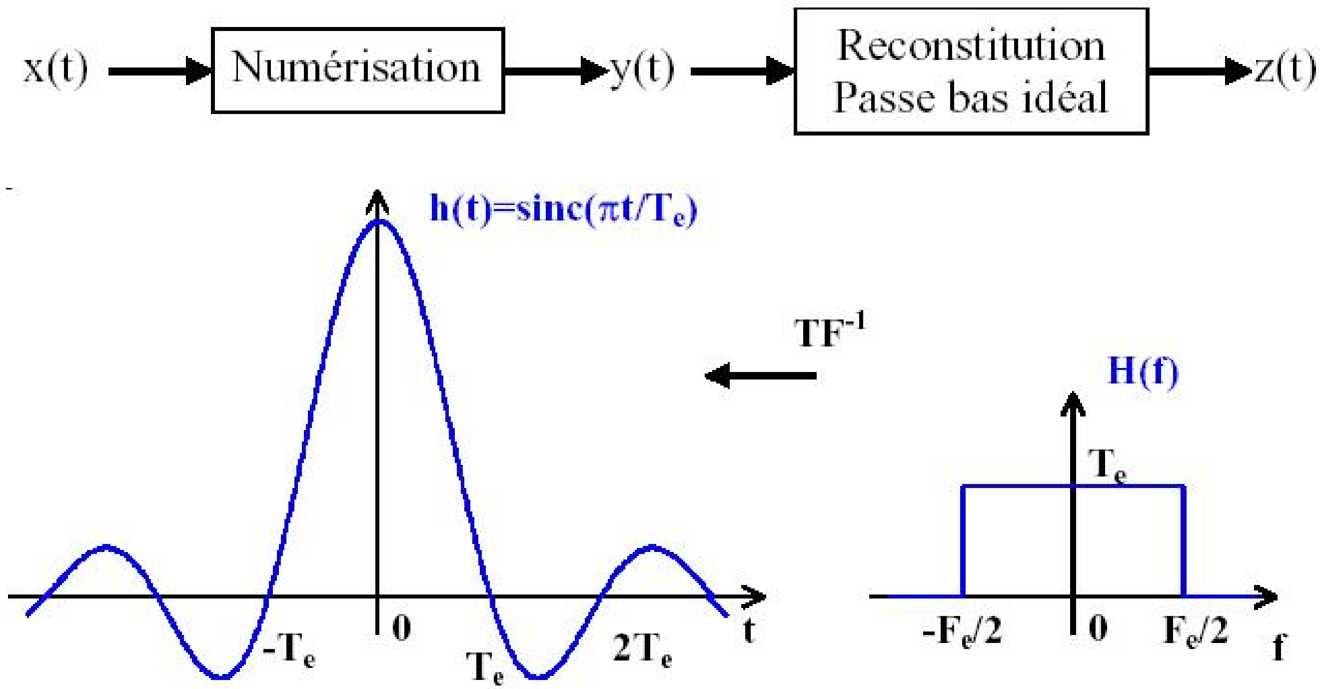
Reconstruction exact de $x(t)$

Reconstruction exacte si sommation de $-\infty$ à $+\infty$.

$$x_r(t) = h(t) * x_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n h(t - nT_e)$$



Filtre passe bas idéal



Le filtre n'est pas causal et n'a pas un support fini.

Pour interpoler parfaitement une valeur $x(t)$, il faut garder en mémoire une infinité de valeurs $(x_n) \Rightarrow$ pas réalisable en pratique.

Repliement spectral

Quand la fréquence d'échantillonnage est trop faible ($F_e/2 < F_{max}$), les conditions du théorème de Shannon-Nyquist ne sont plus respectées.

On a trouvé : $X_d(f) = F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nF_e)$.

Phénomène de repliement spectral : Pour $f \leq F_e/2$ la relation $X(f) = T_e X_d(f)$ n'est plus valide, car la somme ci-dessus peut englober plusieurs termes non-nuls au lieu d'un seul $\Rightarrow$ repliement des composantes hautes fréquences de $X(f)$ et le signal $x_r = h * s_d$ n'est pas conforme au signal original x.

Quand un signal a une fréquence de Nyquist trop grande $F_{max} > F_e/2$, on filtre $x(t)$ pour éliminer des composantes fréquentielles au dela de $F_e/2$. Ce filtre est appelé **filtre anti-repliement**

Filtres de restitution

Si h est la réponse impulsionnelle du filtre de reconstruction, on a :

$$x_r(t) = \sum_n x_n h(t - nT_e)$$

Si les conditions de Shannon sont respectées, $X(f) = T_e \frac{Rect_{[-F_e/2, F_e/2]}(f)}{H(f)} X_r(f)$

Lorsque $H(f)$ est une bonne approximation de $T_e Rect_{[-F_e/2, F_e/2]}(f)$, x_r est "proche" de x.

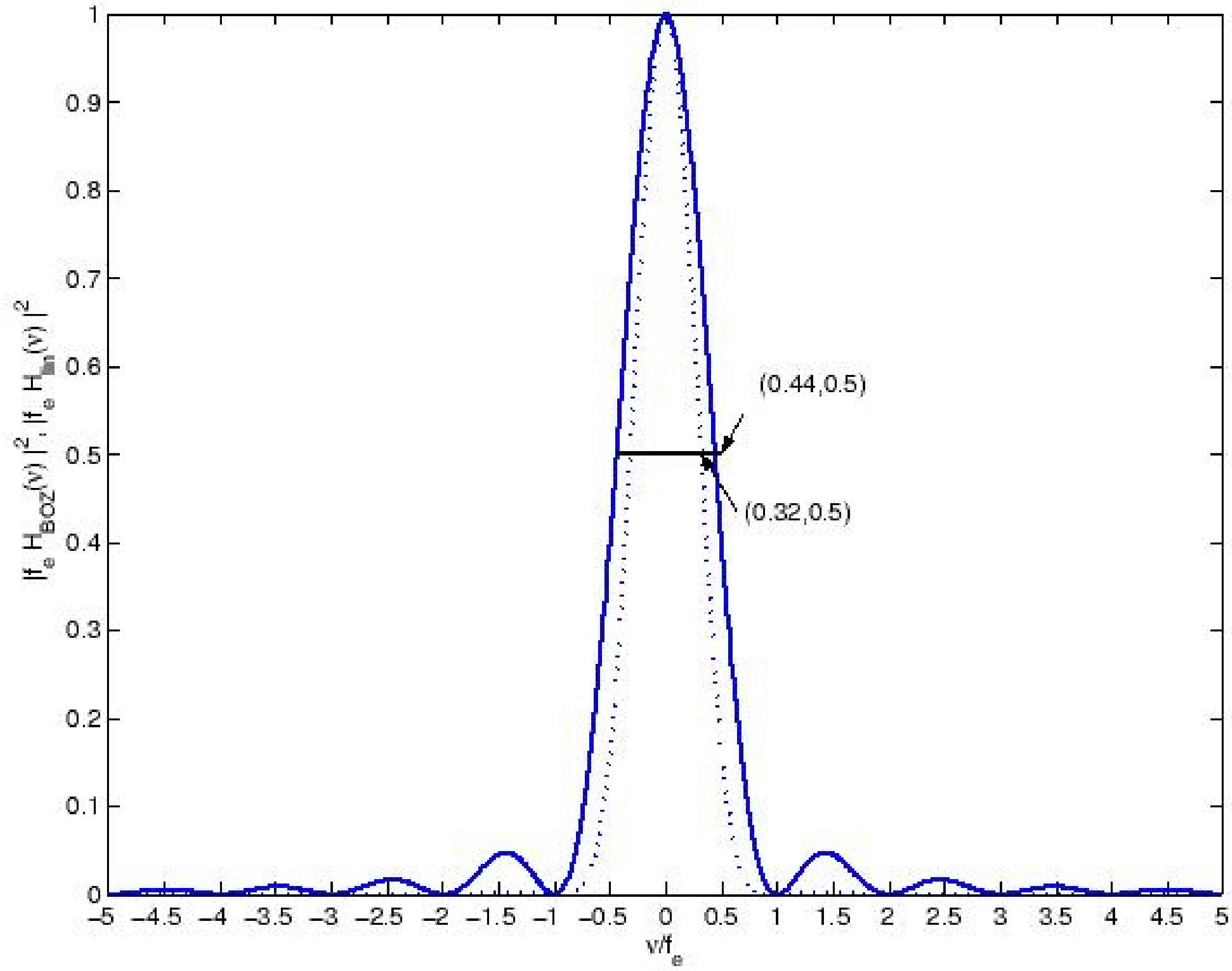
H doit couper toute les fréquences supérieures à $F_e/2$.

Filtres de restitution

– **Bloqueur d'ordre zero** : $h_{boz}(t) = Rect_{[0,T_e]}(t)$
$H_{boz}(f) = T_e exp(-i\pi f T_e) sinc(\pi f T_e)$.
Les composantes de fréquence supérieure à $F_e/2$ sont atténuées mais ne sont pas totalement annulées.

– **Interpolation linéaire** (blocage d'ordre 1) : $h_{lin}(t) = Tri(t/T_e)$ avec
$Tri(t) = (1 - |t|)Rect_{[-1,1]}(t)$.
$H_{lin}(f) = T_e sinc^2(\pi f T_e)$.
Forte atténuation des fréquences indésirables et une bande passante plus étroite $\Rightarrow$ meilleure qualité que le bloqueur d'ordre 0.

Filtres de restitution



Spectres d'énergie des filtres de reconstruction BOZ (gras) et linéaire (pointillés).