
II. Représentation des Signaux en Fréquence

Transformées de Fourier

Représentation en Fréquence :

4 modèles

- Signaux continus périodiques
 - Série de Fourier (SF)
- Signaux continus non périodiques
 - Transformée de Fourier (TF)
- Signaux discrets non périodiques
 - Transformée de Fourier des signaux discrets (TFSD)
- Signaux discrets périodiques
 - Transformée de Fourier discrète (TFD)

Justification

- Représentation temporelle
 - Extraction de paramètres (amplitude,)
- Cas particulier des signaux « sinus »
« cosinus »
 - déterminés par la connaissance de :
 - l'amplitude, la fréquence (période) et la phase
- Série de Fourier (1807)
 - Tous les signaux périodiques peuvent se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t), \quad x(t) \text{ périodique de période } T_0$$

Représentation des signaux périodiques (1/2)

- Cas trivial : $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$
 $x(t) = A \cos(\phi) \sin(\omega_0 t) + A \sin(\phi) \cos(\omega_0 t)$
 $\rightarrow a_0 = 0, a_1 = A \sin(\phi), b_1 = A \cos(\phi)$
- Cas quelconque : $x(t)$ périodique de période T_0

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n \omega t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(n \omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n \omega t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(n \omega t) dt$$

Représentation des signaux périodiques (2/2)

- Formulation complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n].\exp(jn\omega_0 t)$$

- Cas trivial : $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$

$$x(t) = (Ai/2).(e^{-i\theta} - e^{i\theta}); \quad \theta = \omega_0 t + \phi$$

$$x(t) = (Ai/2)(e^{-i\phi} \cdot e^{-i\omega_0 t} - e^{i\phi} \cdot e^{i\omega_0 t})$$

$$\rightarrow X[1] = -(Ai/2) \cdot e^{i\phi}; \quad X[-1] = (Ai/2) \cdot e^{-i\phi}$$

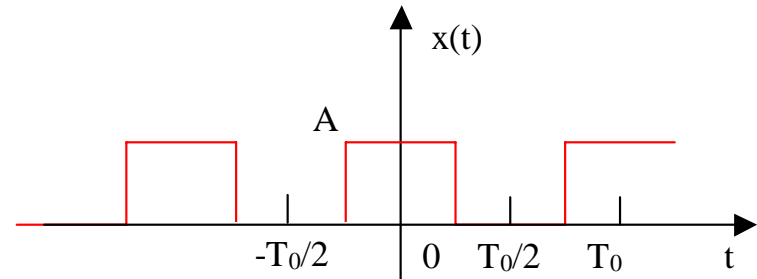
- Cas quelconque : $x(t)$ périodique de période T_0

$$X[n] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

$$X[n] = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Exemples (1/2)

Signal Carré



$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \begin{cases} \rightarrow a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2}{\pi(2p+1)} \\ \rightarrow a_{2p} = 0 \end{cases}$$

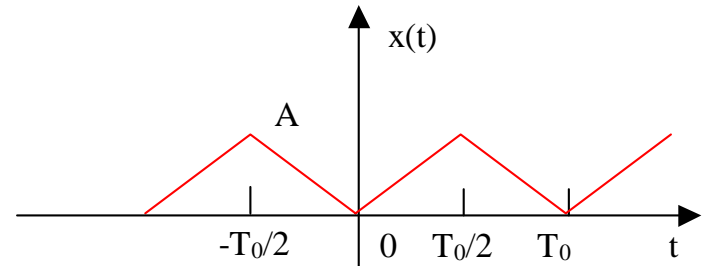
$$a_0 = A$$

$$a_{2p} = 0$$

$$b_n = 0 \quad (\text{Signal pair})$$

$$X[n] = \frac{a_n}{2}$$

Signal Triangle



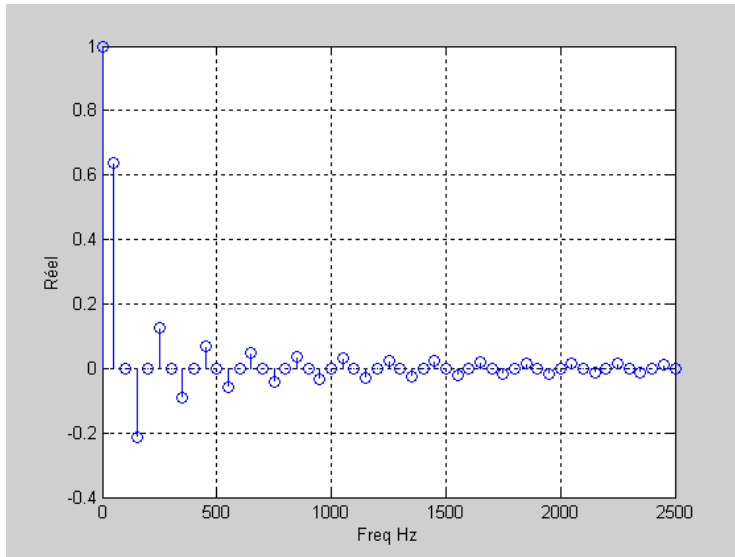
$$a_n = \frac{2A}{(\pi n)^2} (\cos(n\pi) - 1) \quad a_0 = A$$

$$\begin{cases} \rightarrow a_{2p+1} = \frac{-4A}{(\pi(2p+1))^2} \\ \rightarrow a_{2p} = 0 \end{cases}$$

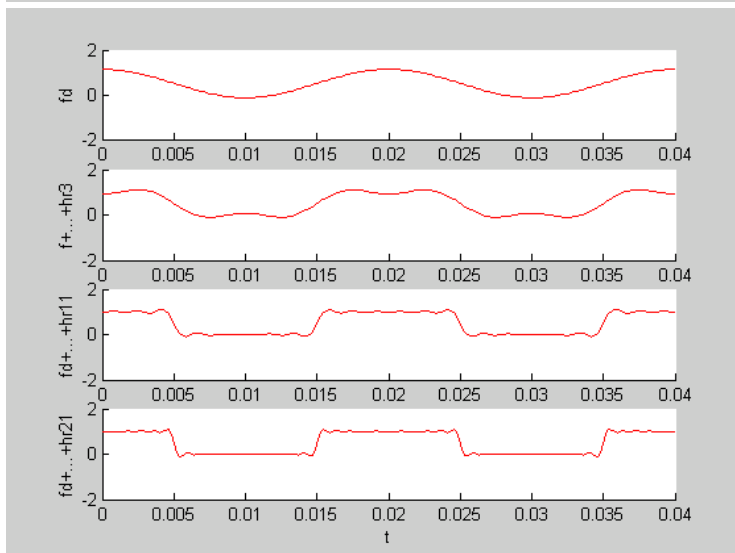
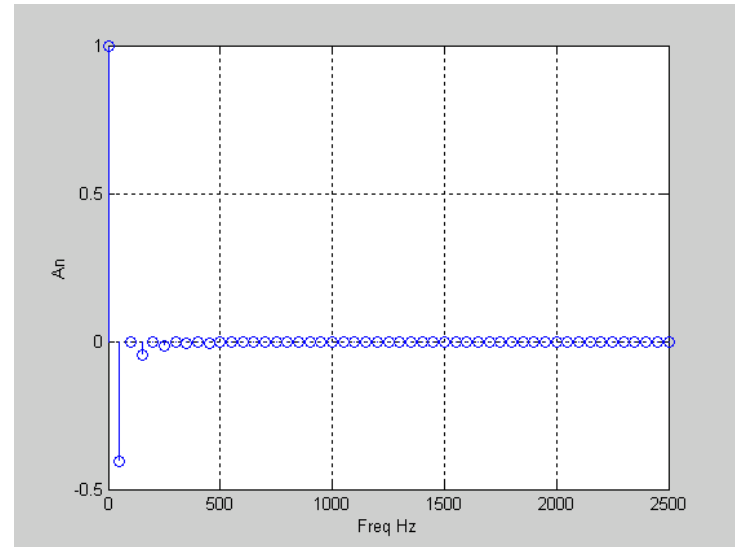
$$b_n = 0 \quad (\text{Signal pair})$$

$$X[n] = \frac{a_n}{2}$$

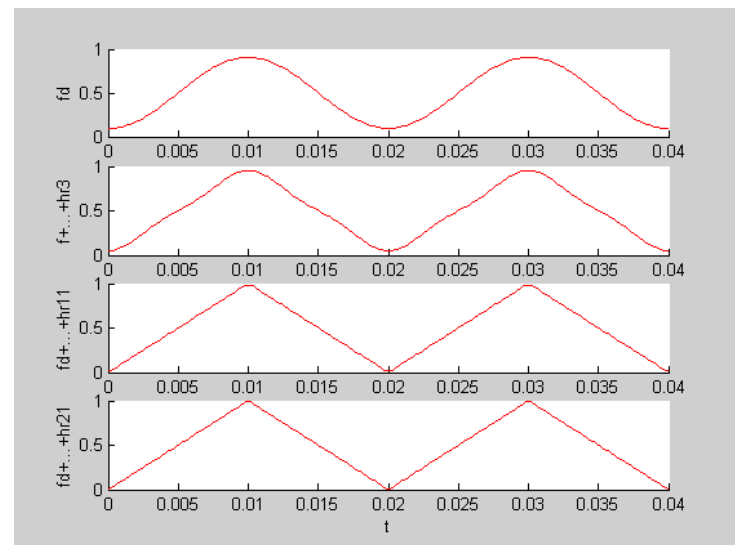
Exemple (2/2)



a_n



Recons-
truction



Spectre de raies

- Dans le domaine fréquentiel, un signal périodique est représenté par un spectre de raies
 - Connaissance de la suite des $X[n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X[n]| = 0 \quad \text{Convergence}$$

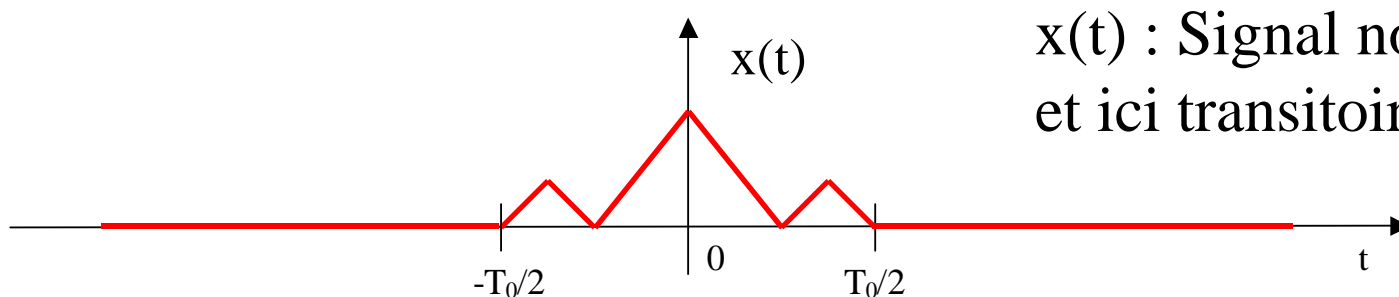
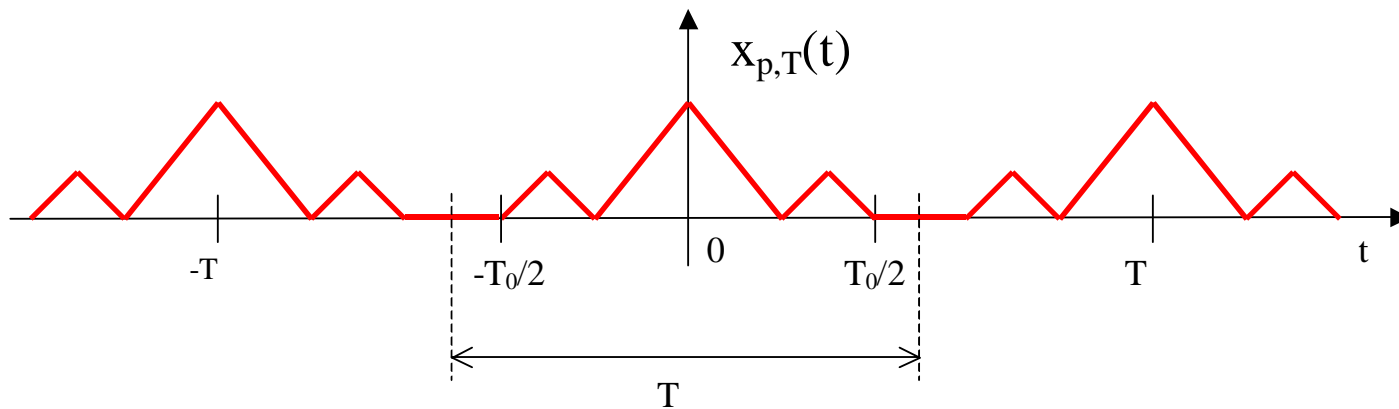
$|X[n]|$: module du spectre

$\text{Real}\{X[n]\}$: Partie réelle du spectre

$\text{Imag}\{X[n]\}$: Partie imaginaire du spectre

Signaux continus non périodiques

- Extension
 - Que se passe t'il quand T tend vers l'infini ?
 - Spectre de raies \rightarrow spectre continu



$x(t)$: Signal non périodique
et ici transitoire

Transformée de Fourier

C'est la Transformée de Fourier inverse : $x(t) = \text{TF}^{-1}\{X(f)\}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(2\pi j f t) df$$

C'est la Transformée de Fourier : $X(f) = \text{TF}\{x(t)\}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2\pi j f t) dt$$

$X(f)$ existe si l'intégrale converge (conditions d'existence)

Extension

- Que se passe-t-il pour $x(t) = \delta(t)$?
- Que se passe-t-il pour $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$ ou $\cos(\cdot)$?
- Les 2 réponses sont liées :
 - Calcul de $\text{TF}\{\delta(t)\} = 1$
 - Calcul de $\text{TF}^{-1}\{\delta(f-f_0)\} = \exp(2\pi j f_0 t) = \exp(j\omega_0 t)$
- Pour que TF et TF^{-1} correspondent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi j f t) df = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi j f t) dt = \delta(f)$$

Exemples

Signal $x(t)$	TF : $X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$exp(-2\pi jft_0)$
$exp(-t/\tau) \cdot \gamma(t)$	$\tau/(1+2\pi jf\tau)$
<i>porte $p(t)$: durée $-T/2, +T/2$; amplitude 1</i>	$\sin(\pi fT)/(\pi f) = T \text{sinc}(\pi fT)$ [sinc(x)=sin(x)/x]
$A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{Aj}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$
$A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$

Propriétés (1/3)

- Linéarité
- Symétries
 - $x(t)$ réel, $\text{Real}\{X(f)\}$ paire, $\text{Imag}\{X(f)\}$ impaire, $|X(f)|$ pair
 - $x(t)$ réel pair, $\text{Imag}\{X(f)\}$ nulle
 - $x(t)$ réel impair, $\text{Real}\{X(f)\}$ nulle

Propriétés (2/3)

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(f)$$

- Translation temporelle

$$x(t-a) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \exp(-2\pi j a f) X(f)$$

- Translation fréquentielle

$$x(t) \exp(-2\pi j f_p t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(f - f_p)$$

- Dérivation

$$\frac{d_n x(t)}{dt_n} \stackrel{TF}{\leftrightarrow} (2\pi j f)^n X(f)$$

- Théorème de Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Propriétés (3/3)

- Théorème de la convolution
$$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$$
$$y(t) \xleftrightarrow{\quad} Y(f)$$
$$z(t) = x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} Z(f) = X(f) \times Y(f)$$
$$z(t) = x(t) \times y(t) \xleftrightarrow{TF} Z(f) = X(f) * Y(f)$$
- Lien avec la transformée de Laplace pour les signaux causaux

$$X(f) = Fx(f) = Lx(s = 0 + 2\pi jf)$$