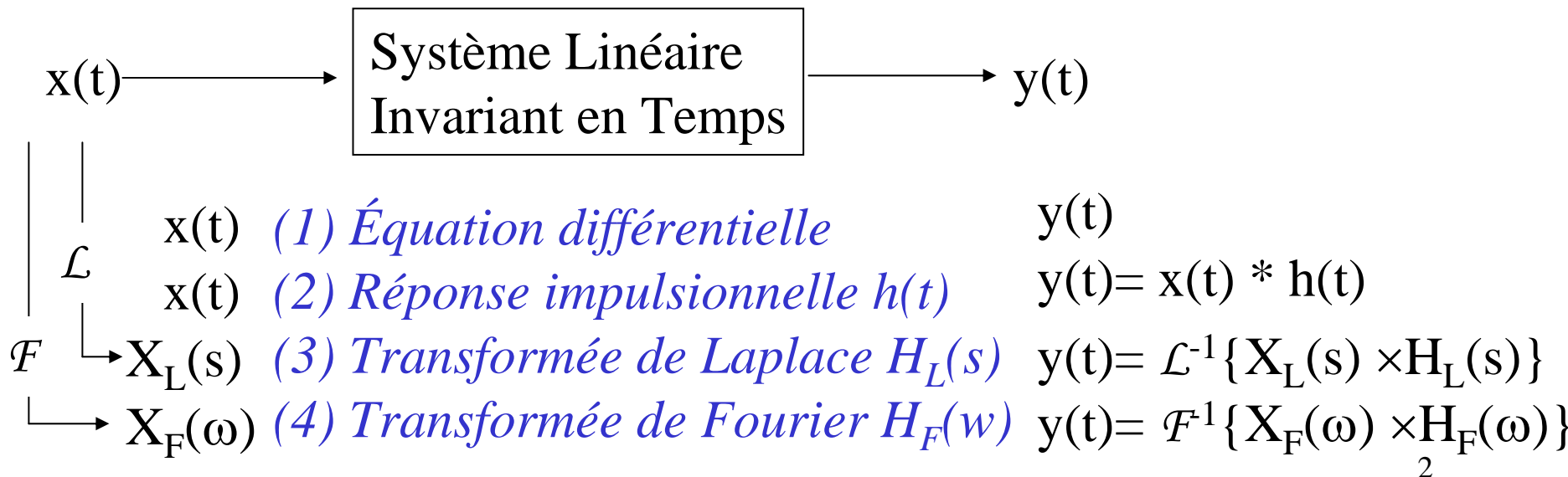

Echantillonnage de Shannon

Signaux, Systèmes à temps continu : Rappel

- (1) et (2) : Résolution dans le domaine temporel
- (3) et (4) : Résolution dans un domaine transformé
 - (3) Description du régime transitoire et permanent
 - (4) Description du régime permanent uniquement



Temps continu \rightarrow Temps discret :

Pour les systèmes (Rappel)

- Transformée de Laplace (temps continu)
 - Système causal, signaux transitoires

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

- Transformée de z (temps discret)
 - Systèmes discrets en temps, signaux discrets transitoires

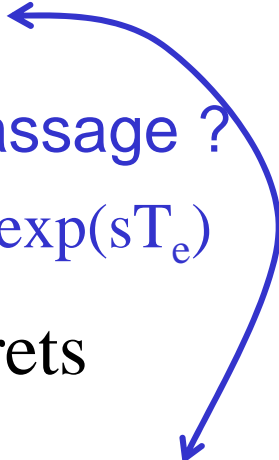
$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

Unilatérale, causal

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

Bilatérale, causal, anticausal

Passage ?
 $z = \exp(sT_e)$



Temps continu \rightarrow Temps discret : Et pour les signaux ?

- Temps continu
 - Signaux périodiques : Série de Fourier
 - Signaux non périodiques : Transformée de Fourier
 - + extension aux distributions :
 - Transformée de Fourier pour les signaux périodiques et non-périodiques

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \exp(-j\omega t_0)$$

$$\mathcal{F}\{\exp(j\omega_0 t)\} = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega t) d\omega = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega t) dt = \delta(\omega)$$

Représentation en Fréquence :

4 modèles

- Cas 1 : Signaux continus périodiques
 - Série de Fourier (SF)
- Cas 2 : Signaux continus non périodiques
 - Transformée de Fourier (TF)
- Cas 3 : Signaux discrets non périodiques
 - Transformée de Fourier des signaux discrets (TFSD)
- Cas 4 : Signaux discrets périodiques (durée finie)
 - Transformée de Fourier discrète (TFD)

→ Lien avec la TZ

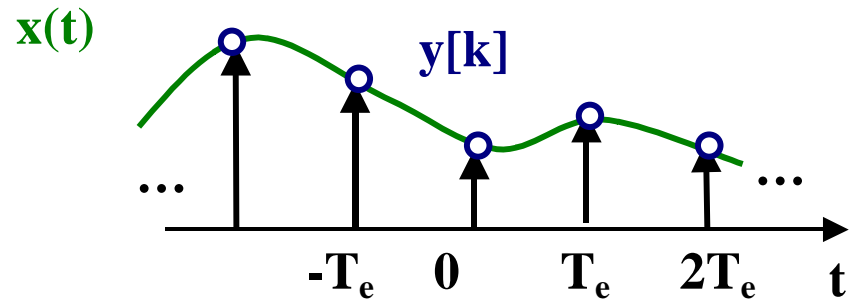
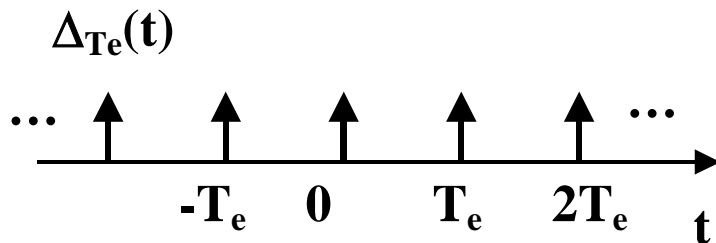
Cas 2 → Cas 3 :

Discrétisation en temps

- Échantillonneur idéal dans le domaine temporel



$$y(t) = x(t) \times \Delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k.T_e) \times \delta(t - k.T_e)$$

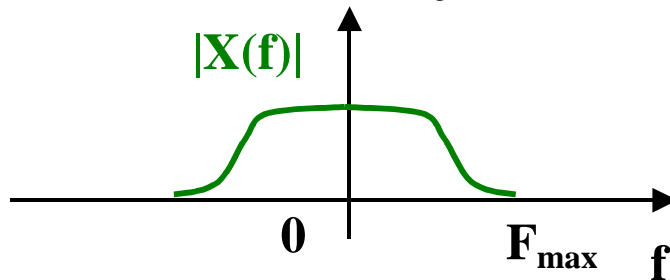


Discrétisation en temps → Périodisation en fréquence

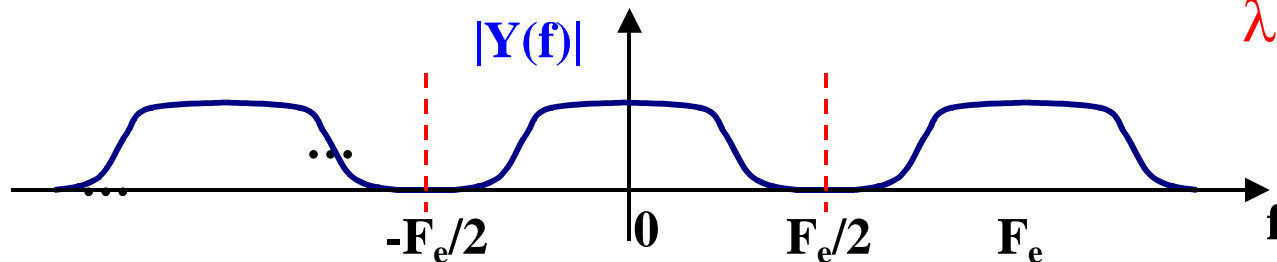
- Échantillonneur idéal dans le domaine fréquentiel



$$Y(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$



→ Théorème de Shannon
 $F_e/2 > F_{\max}$



→ Fréquence réduite :
 $\lambda = f/f_e = \omega/\omega_e$

Numérisation : Condition de Shannon

- Pas de repliement spectral si :
 - $F_e > 2 F_{\max}$
- Conséquence : signal d'entrée à spectre borné
 - Filtre « Passe-Bas » anti repliement
 - $F_c < F_e/2$, F_c : fréquence de coupure
- Mise en œuvre :



Transformée de Fourier des Signaux Discrets

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Discrétisation en temps

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k.T_e) \times \delta(t - k.T_e) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k] \times \delta(t - k.T_e)$$

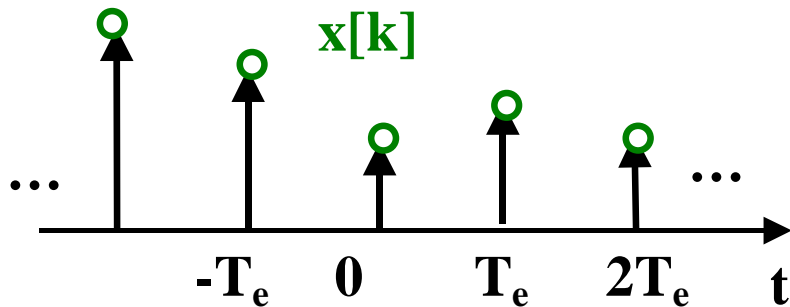
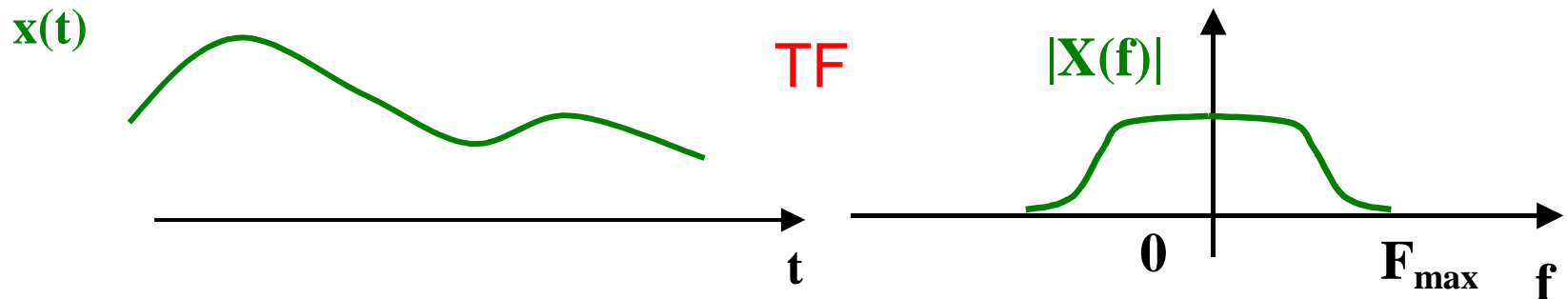
Périodique de période 1
⇒ Série de Fourier

$$X(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \exp(-2\pi j \lambda k)$$

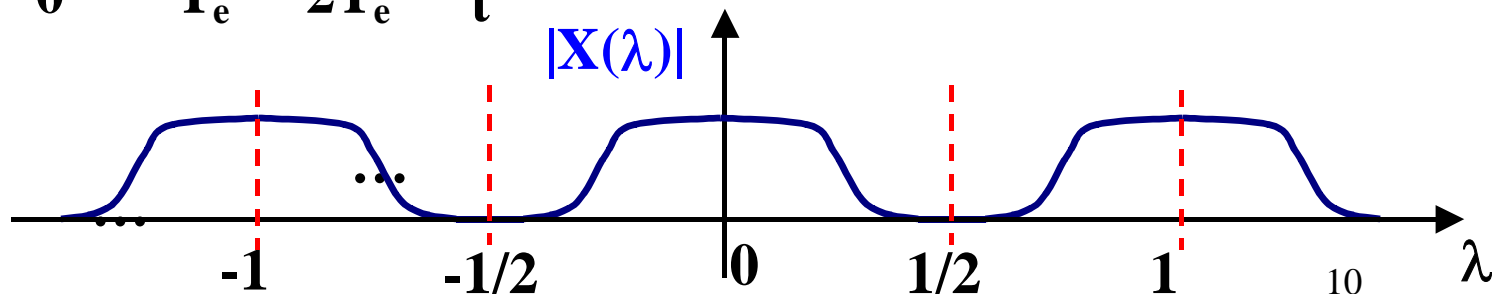
$$x[k] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\lambda) \exp(2\pi j \lambda k) d\lambda$$

C'est la TFSD

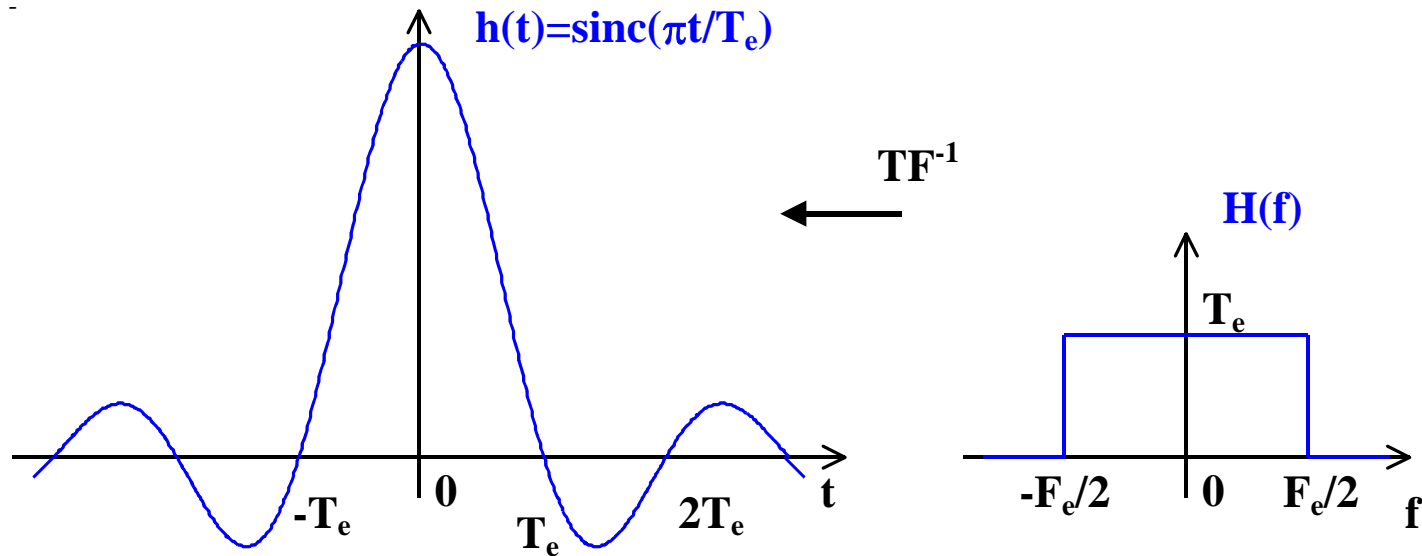
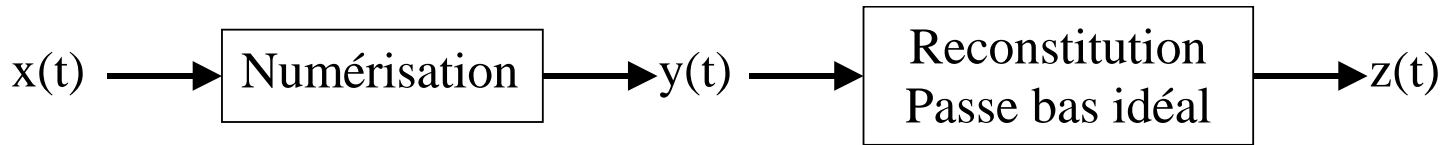
Transformée de Fourier des Signaux Discrets



TFSD
Discret en Temps
Continue et Périodique en Fréquence



Reconstruction : Interpolateur idéal

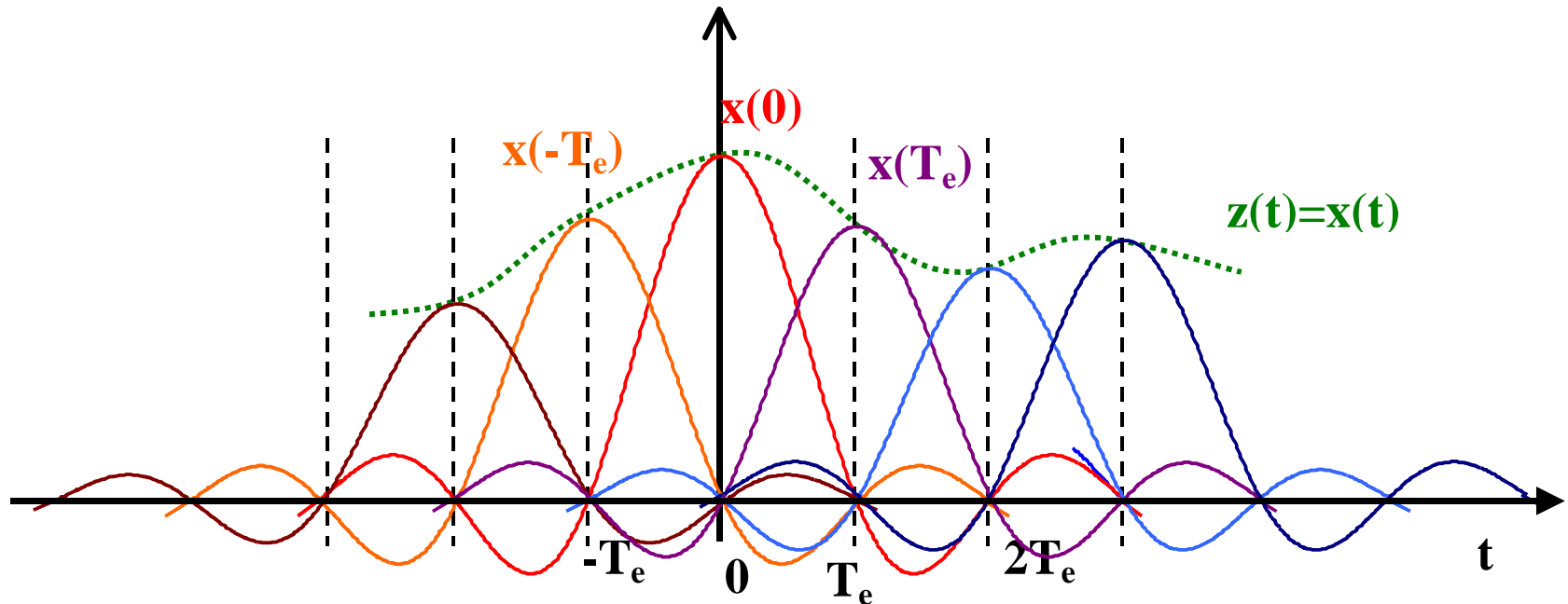


$$z(t) = y(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k.T_e) \times h(t - k.T_e)$$

Reconstruction : Interpolateur idéal

- Reconstitution exacte si sommation de $-\infty$ à $+\infty$

$$z(t) = y(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k.T_e) \times h(t - k.T_e)$$



Lien avec la Transformée en Z

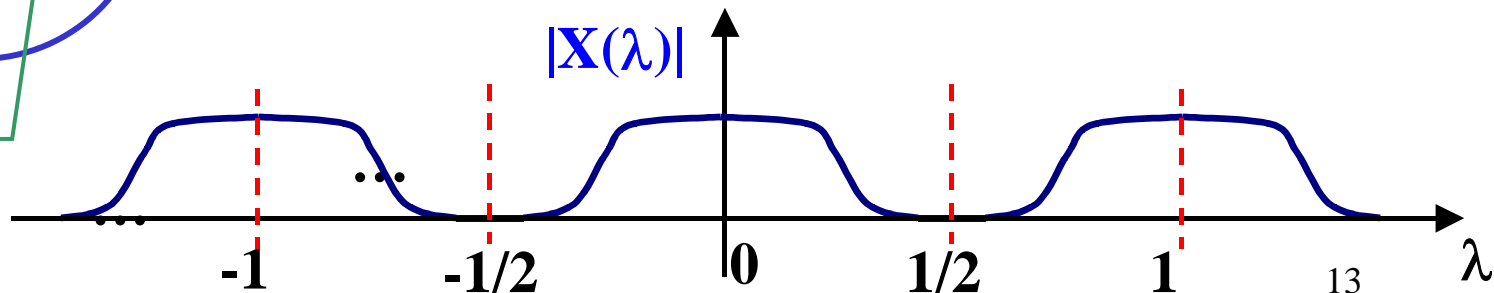
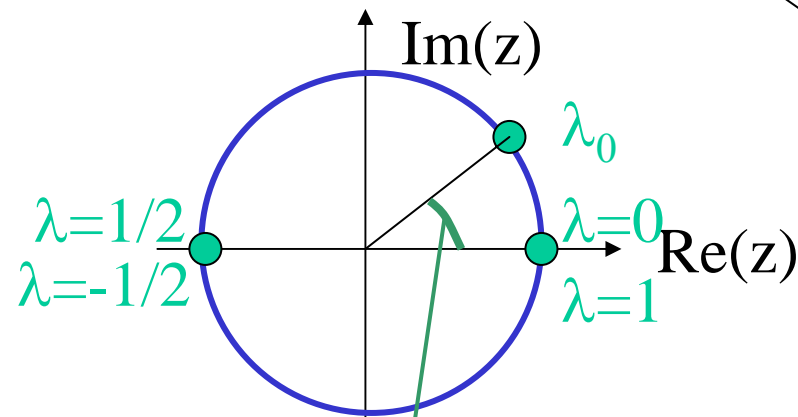
Signal discret en temps : $x[k]$

$$X_Z(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

Changement de variable :

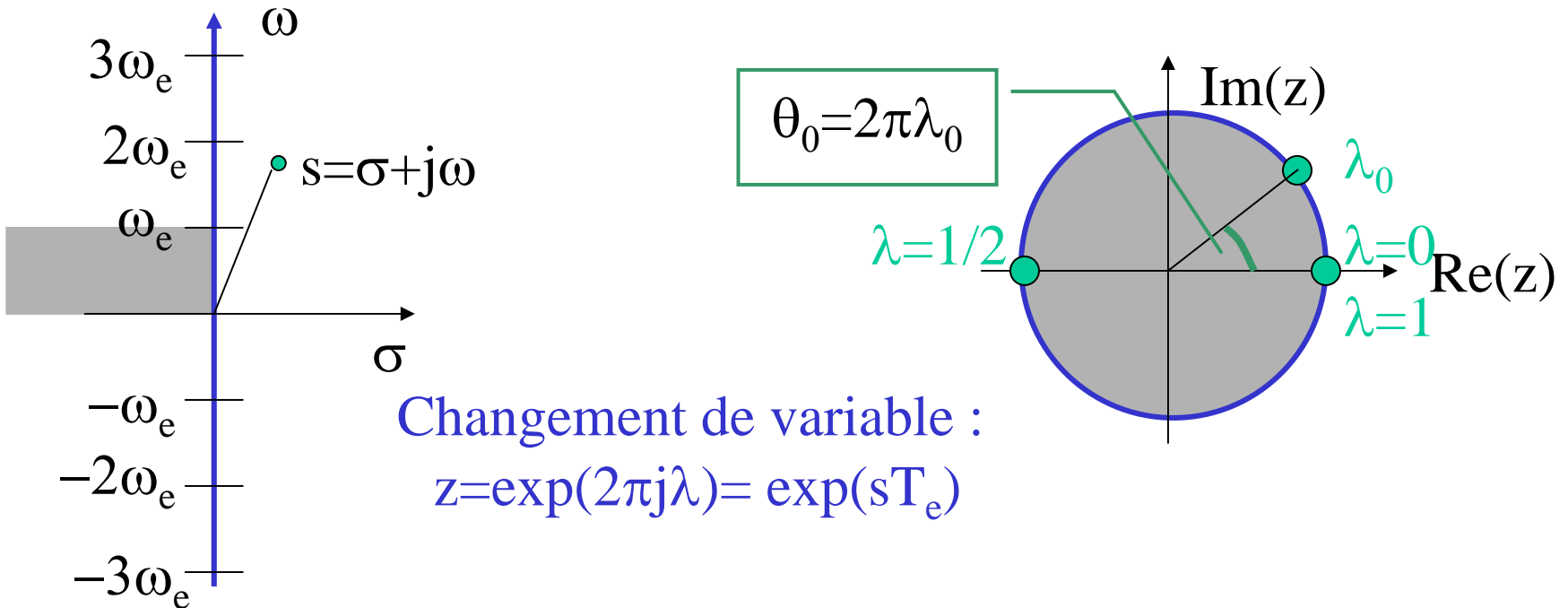
$$z = \exp(2\pi j\lambda)$$

$$X_\lambda(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \exp(-2\pi j\lambda k)$$



$$\theta_0 = 2\pi\lambda_0$$

Illustration de l'effet de l'échantillonnage : Passage $s \rightarrow z$



La moitié gauche de chaque bande de largeur ω_e dans le plan des s est appliquée dans le plan des z à l'intérieur du cercle unité

Échantillonnage en temps , Approximation

- Par échantillonnage, l'équation différentielle caractérisant le système linéaire se transforme en équations aux différences.
 - Cette équation est exacte pour caractériser des systèmes discrets linéaires
 - Cette équation devient approximative pour l'utilisation par voie numérique de systèmes analogiques linéaires
 - équations de passage $s \leftrightarrow z$
 - Équation d'Euler : Equivalence de la dérivée
 - Equation binomiale : Equivalence de l'intégration
 - ...

Comportement décrit en analogique

→ Approximation numérique

- Approximation de la dérivée au premier ordre : Equation d'Euler

$$x'(t) \approx (x[k] - x[k-1]) / T_e$$

On pose : $y[k] = (x[k] - x[k-1]) / T_e$

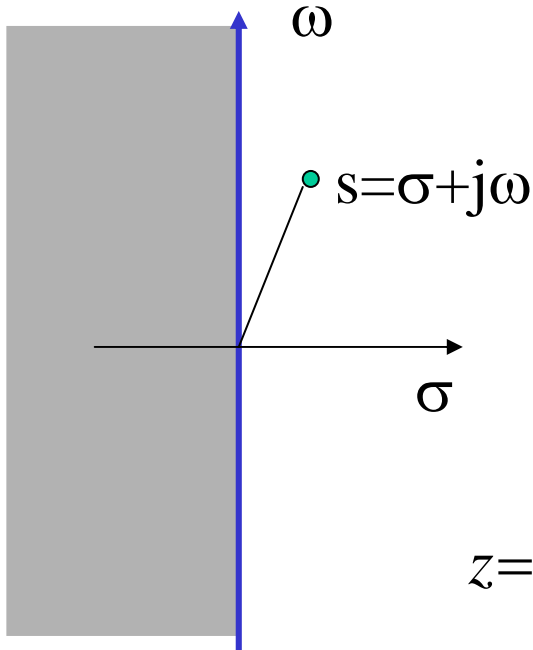
Alors : $Y(z) = [X(z) - z^{-1}X(z)] / T_e$

D'où : $G(z) = Y(z) / X(z) = (1 - z^{-1}) / T_e$

Comme dans le domaine analogique, la dérivée temporelle correspond au produit de la transformée de Laplace par s , dans le domaine des s , alors :

$$s = (1 - z^{-1}) / T_e, \text{ ou } z = 1 / (1 - sT_e)$$

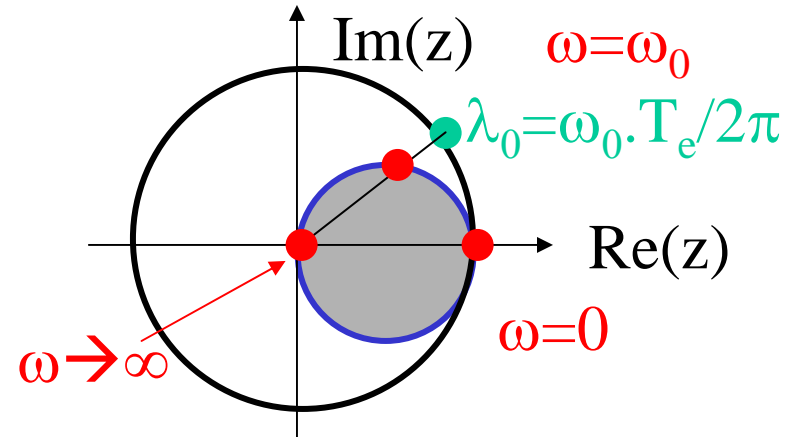
Illustration de l'approximation de la dérivée au premier ordre



Changement de variable :
 $z = 1/(1 - j\omega T_e)$;

$$z = \frac{1 + j\omega T_e}{1 + \omega^2 T_e^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T_e^2} + \frac{j\omega T_e}{1 + \omega^2 T_e^2}$$

$$\omega \rightarrow \infty, z \rightarrow 0$$



Bonne approximation : fréquence d'échantillonnage élevée,
bien au delà de la limite de Shannon

→ Sur échantillonnage