

# Stabilité des systèmes

Un sujet très important, une propriété globale

- Stabilité
- Systèmes rationnels
- Stabilisation par feed-back
- Placement de pôles
- Théorie de Lyapunov

# Stabilité - exemples

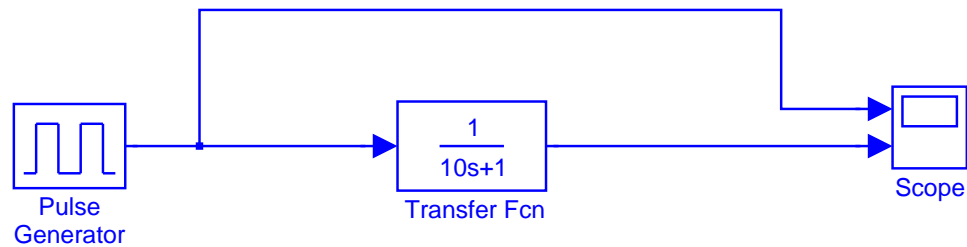
# Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

# Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

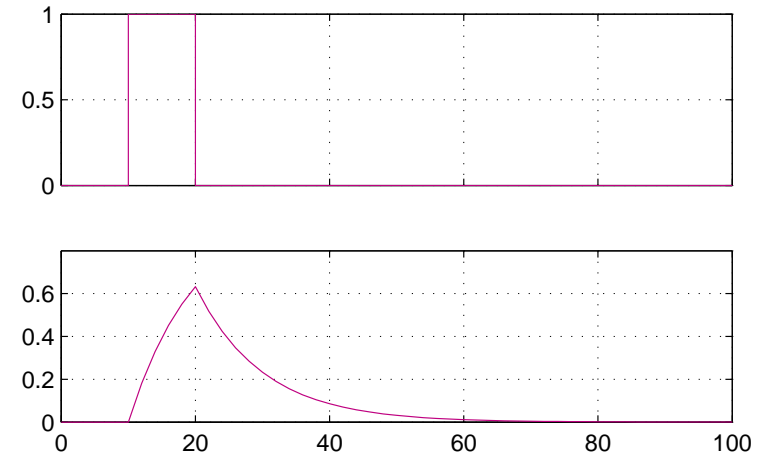
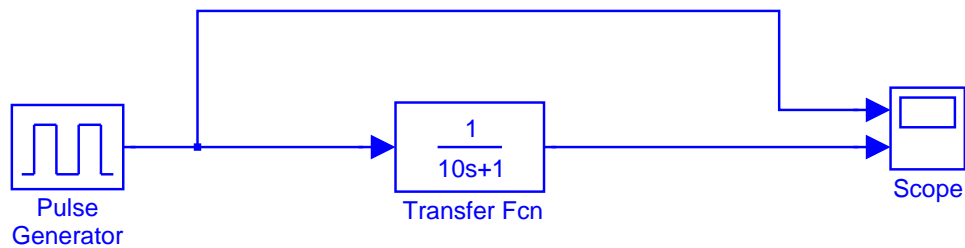
Exemple : Un système **stable**



# Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

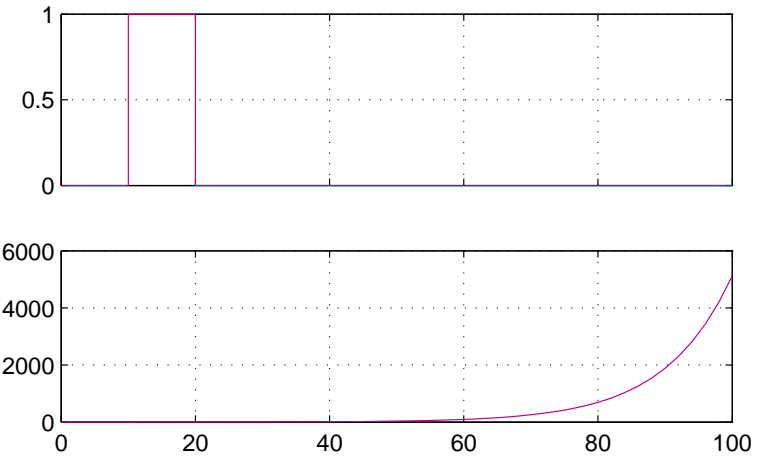
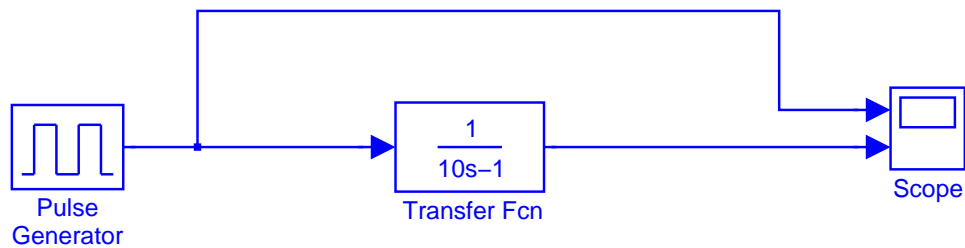
Exemple : Un système **stable**



# Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable

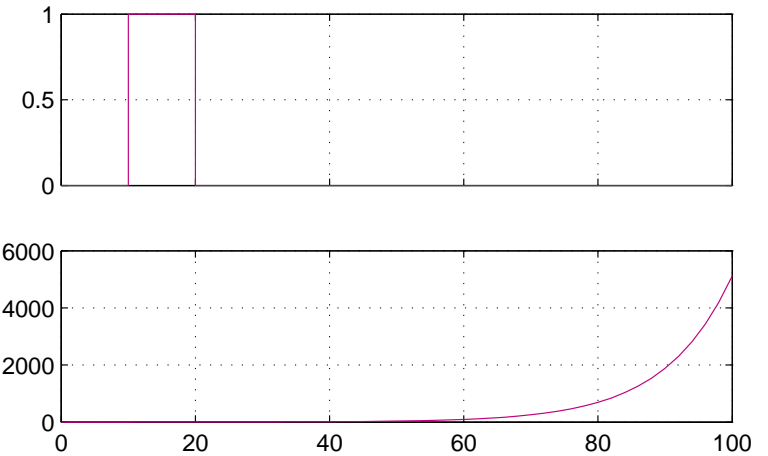
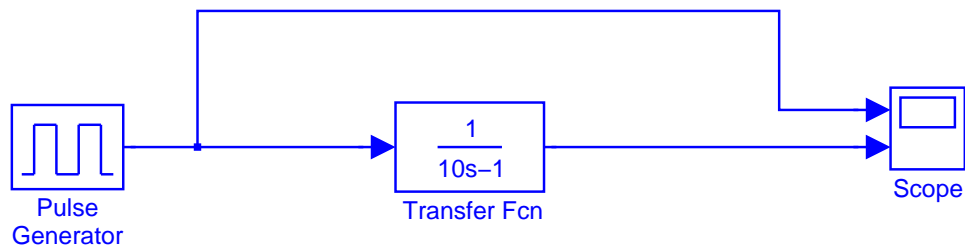


Time offset: 0

# Stabilité - exemples

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable



Time offset: 0

Pourquoi ?

# Stabilité - définitions

Un état d'équilibre est un point  $X_e$  t.q. si en l'absence de commande et de perturbations on a :

$$X(t_0) = X_e \iff X(t) = X_e, t \geq t_0$$

Pour un système  $X'(t) = F(X(t), U(t))$ , les points d'équilibre sont les solutions de l'équation algébrique  $0 = F(X(t), 0)$ .

Un système **linéaire**  $X'(t) = AX(t)$  peut avoir

- Un point d'équilibre **unique**  $X = 0$  si  $A$  est inversible
- Une **infinité** de points d'équilibre si  $A$  n'est pas inversible

L'état d'équilibre  $X_e$  est

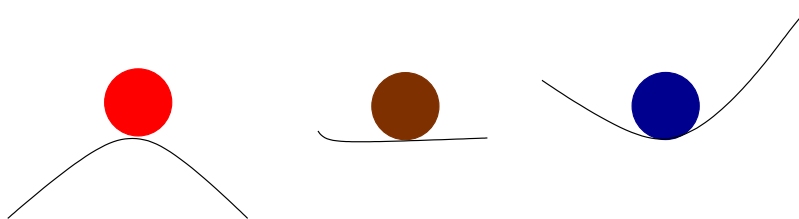
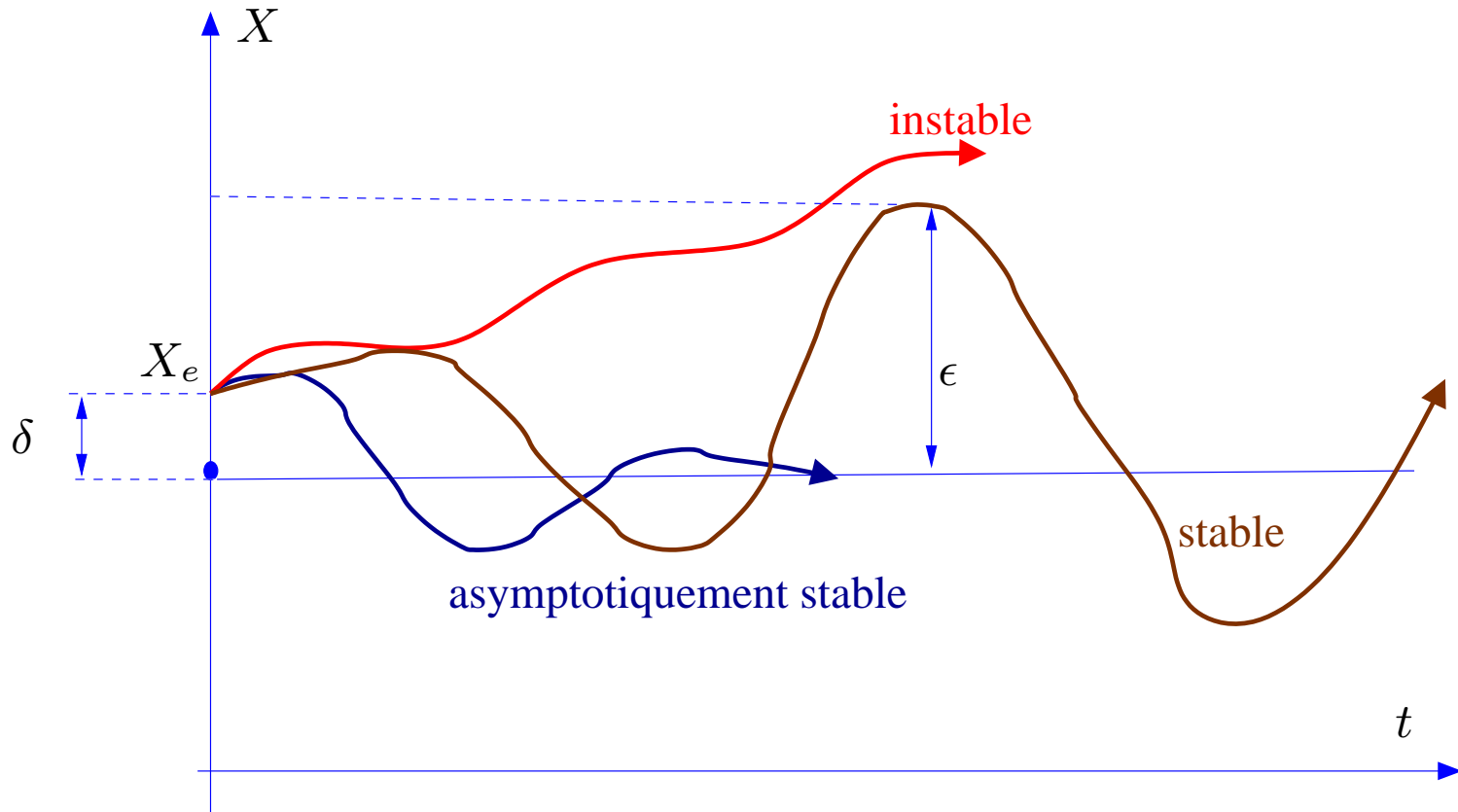
- **stable** si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|X(0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_e\| < \epsilon.$$

- **asymptotiquement stable** si

$$\forall \delta > 0 : \|X(0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_e.$$

# Stabilité - illustration



# Systemes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

# Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec  $\lambda$  à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

# Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec  $\lambda$  à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

Exemple :  $\frac{1}{10s + 1}$

# Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec  $\lambda$  à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

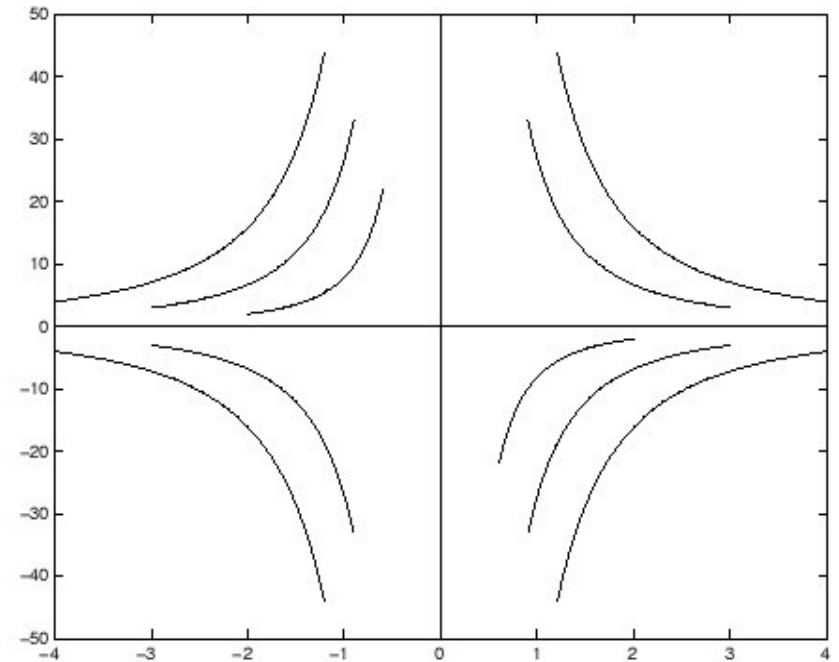
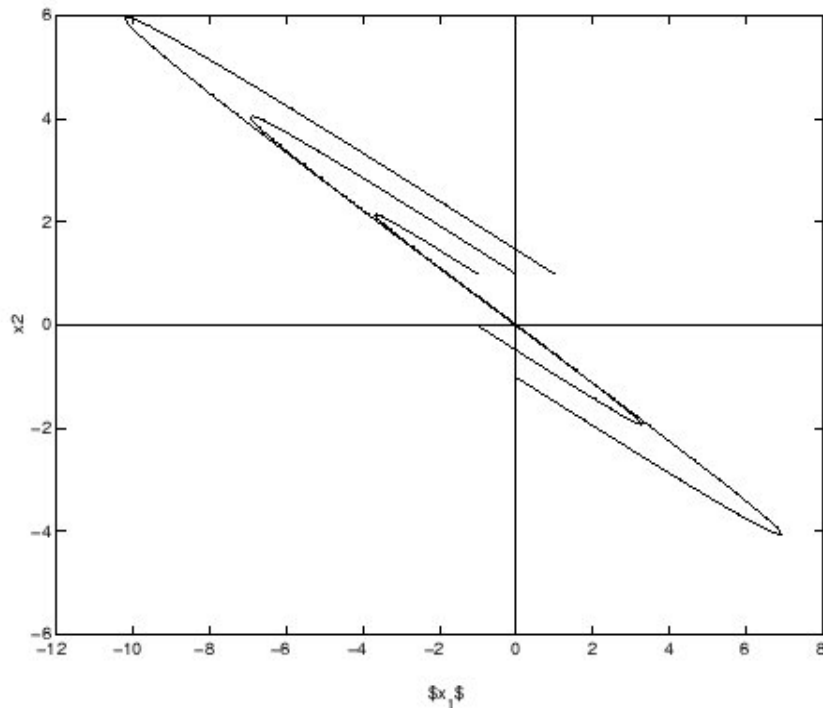
Exemple :  $\frac{1}{10s + 1}$

il y a un seul pôle de valeur  $-\frac{1}{10}$  réelle négative : le système est asymptotiquement stable

# Nature des points d'équilibre

Cas 1 :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réels

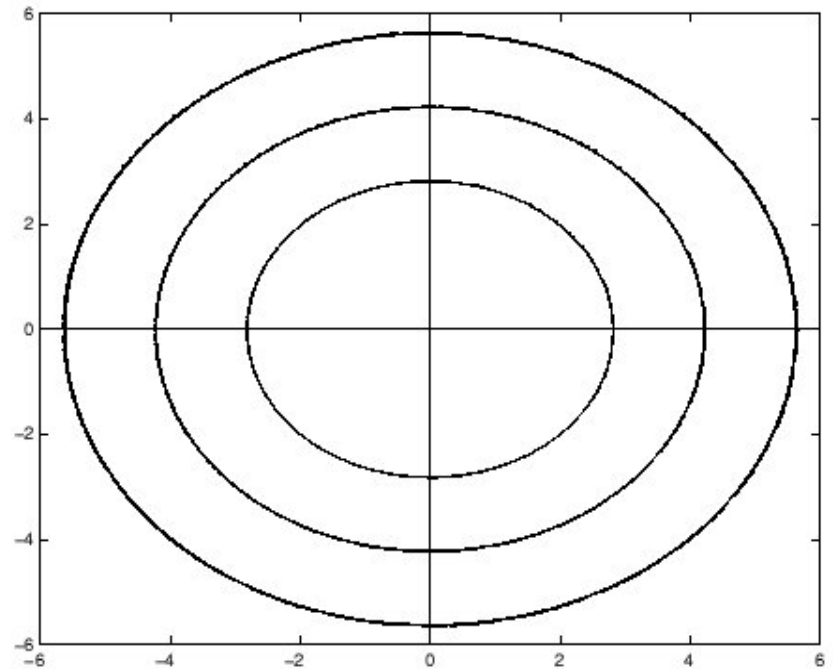
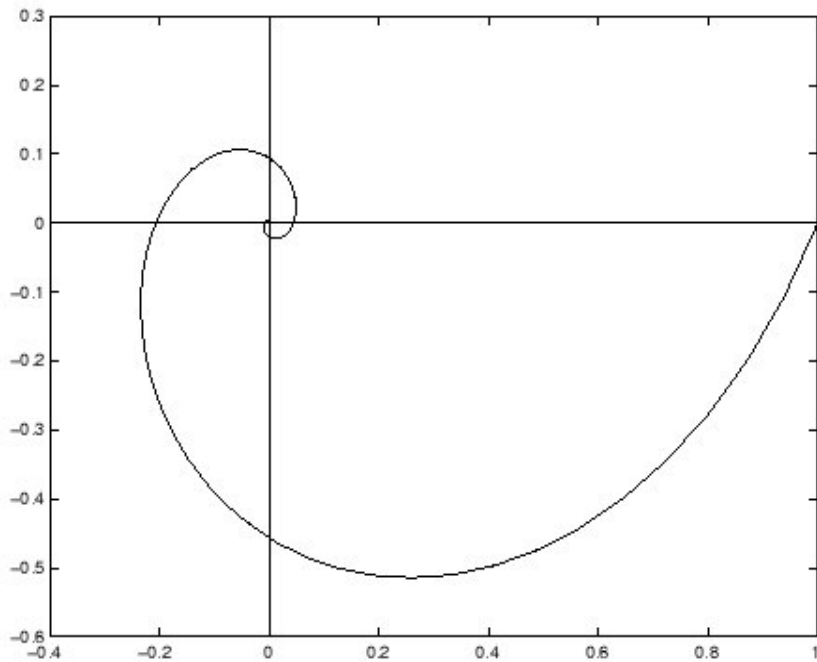
- si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont du même signe, le point  $\mathbf{0}$  est un **noeud** stable ou instable
- si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , le point  $\mathbf{0}$  est un **point-selle (col)** instable



## Nature des points d'équilibre (suite)

Cas 2 :  $\lambda_1 = \rho + j\omega$  et  $\lambda_2 = \rho - j\omega$

- si  $\rho \neq 0$ , le point **0** est un foyer stable ou instable
- si  $\rho = 0$ , le point **0** est un centre



# Stabilisation par feed-back

# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non
- Pourquoi ?

# Stabilisation par feed-back

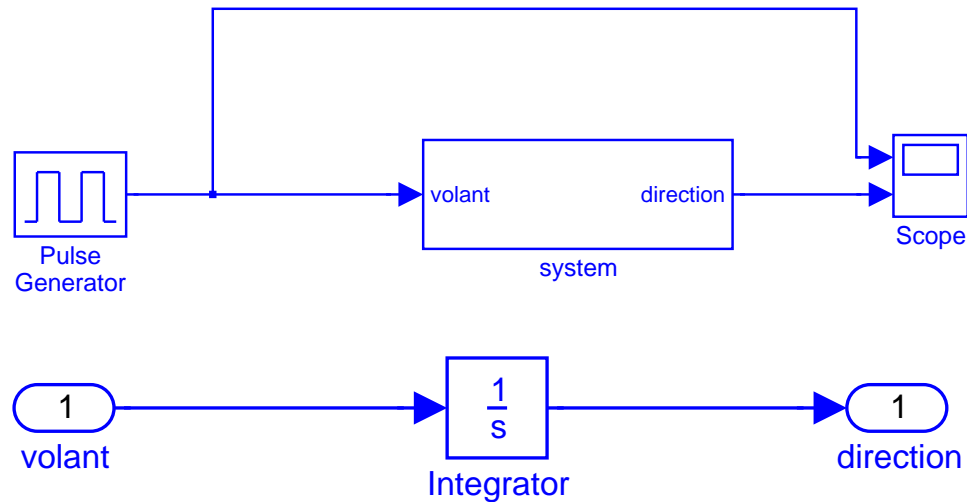
Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non
- Pourquoi ?
- Parce le volant est un intégrateur :

# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

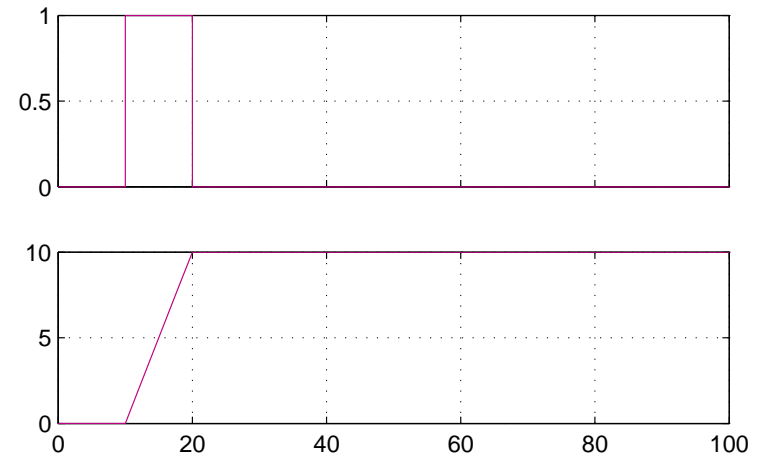
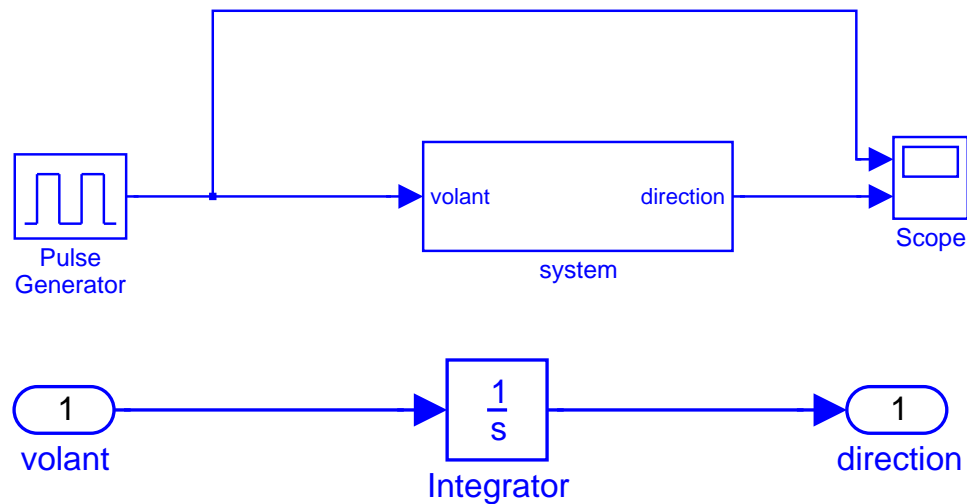
- Non
- Pourquoi ?
- Parce le volant est un intégrateur :



# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non
- Pourquoi ?
- Parce le volant est un intégrateur :

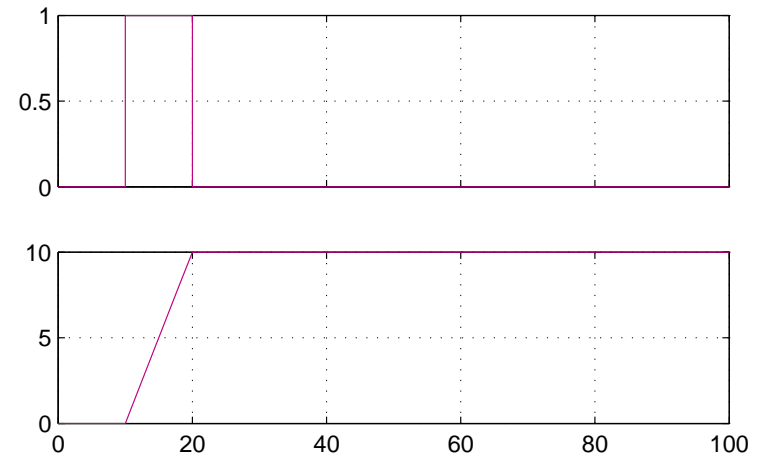
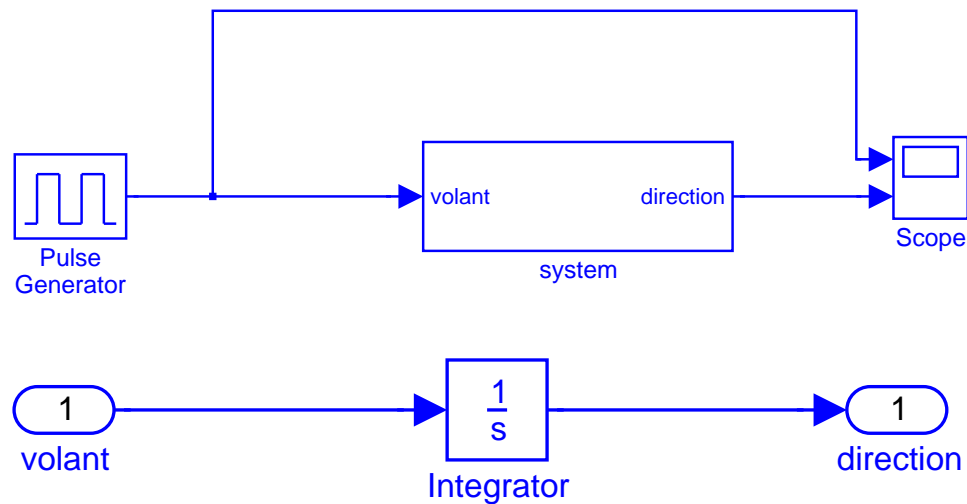


Time offset: 0

# Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non
- Pourquoi ?
- Parce le volant est un intégrateur :



Time offset: 0

Le pôle vaut 0 et n'est pas à partie réelle négative

# Stabilisation par feed-back

Solution :

# Stabilisation par feed-back

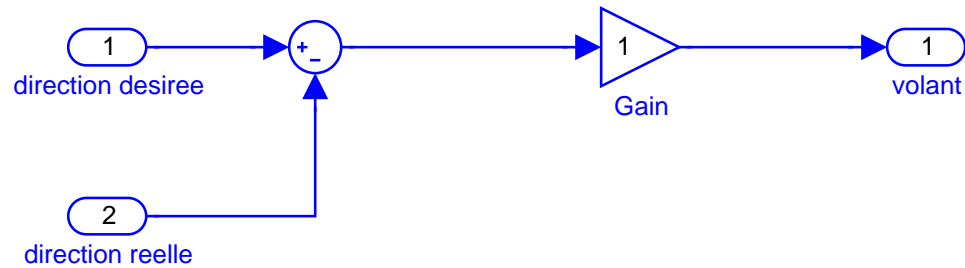
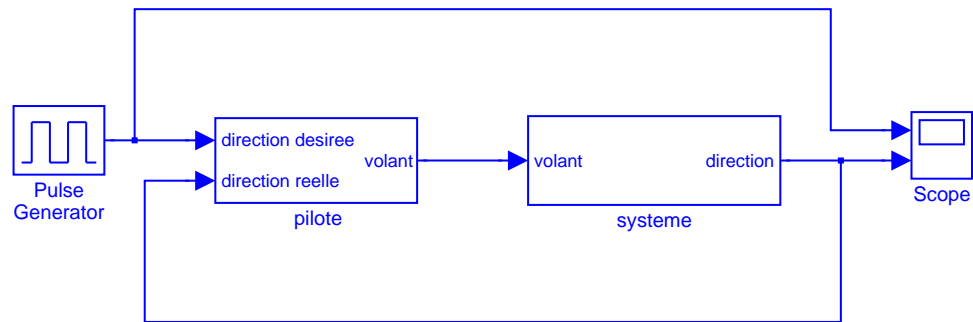
Solution :

Conduire les yeux ouverts

# Stabilisation par feed-back

Solution :

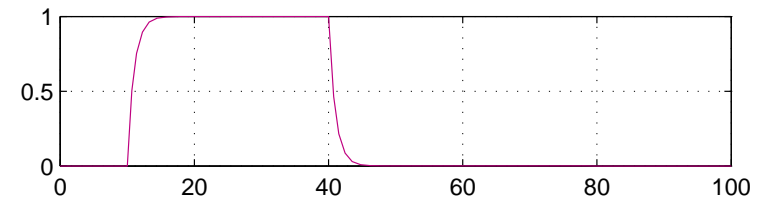
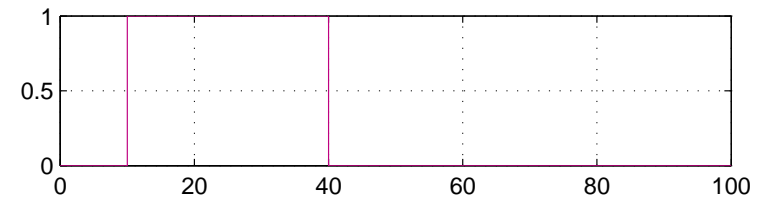
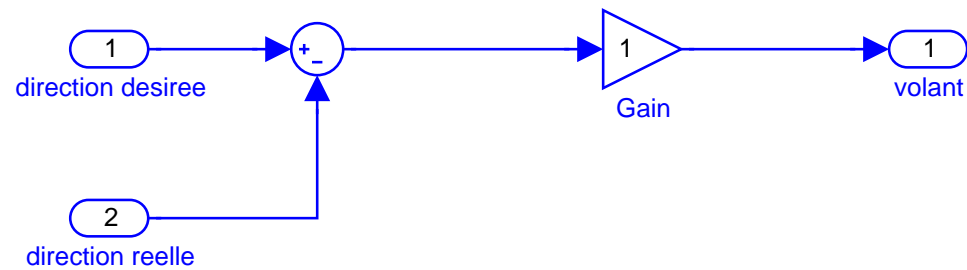
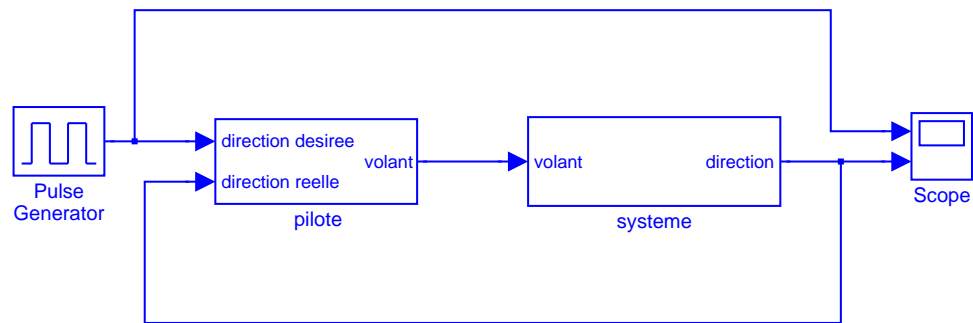
Conduire les yeux ouverts



# Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts

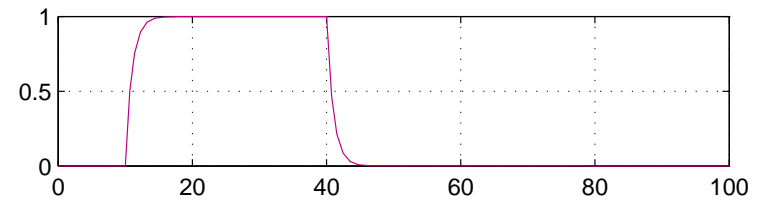
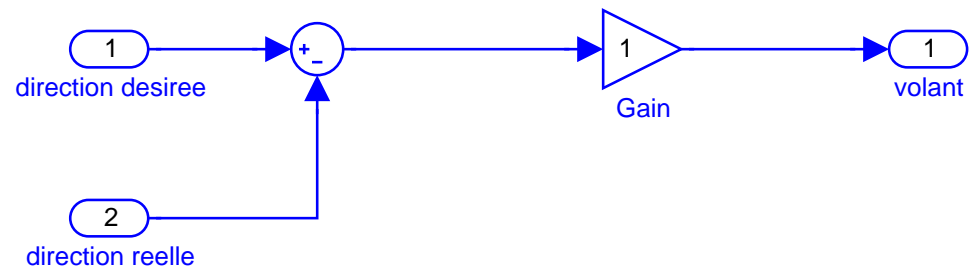
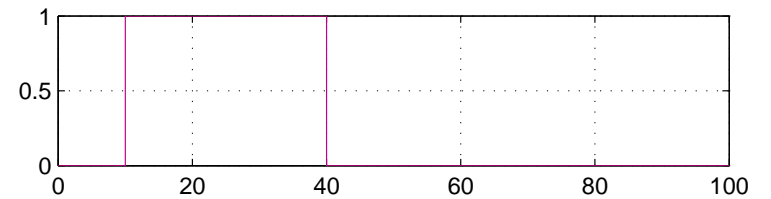
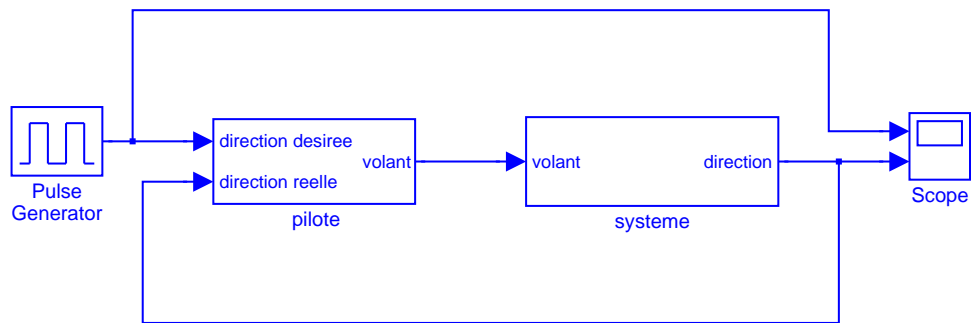


Time offset: 0

# Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts



Time offset: 0

Pourquoi et comment ?

# Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

# Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

Idée : calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$$E = DD - DR$$

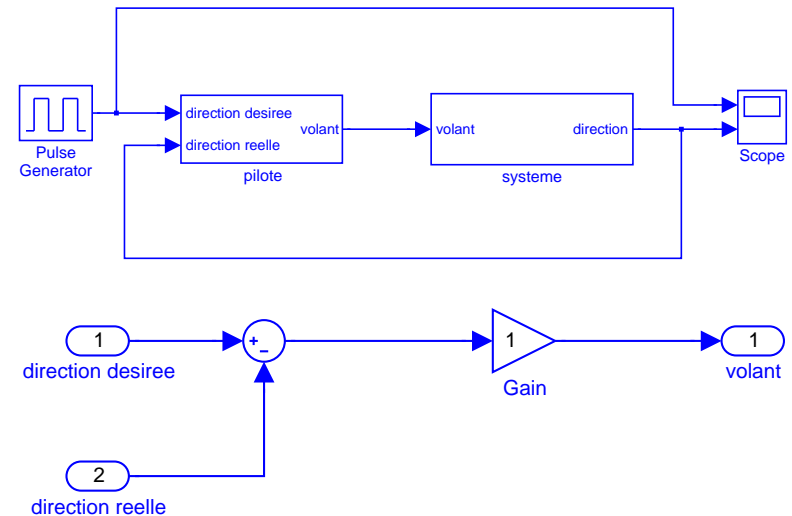
$$V = E$$

$$DR(s) = \frac{1}{s} V(s)$$

$$DR(s) = \frac{1}{s} V(s) = \frac{1}{s} (DD(s) - DR(s))$$

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right) DR(s) = \frac{1}{s} DD(s)$$

$$DR(s) = \frac{1}{s + 1} DD(s)$$



# Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

Idée : calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$$E = DD - DR$$

$$V = E$$

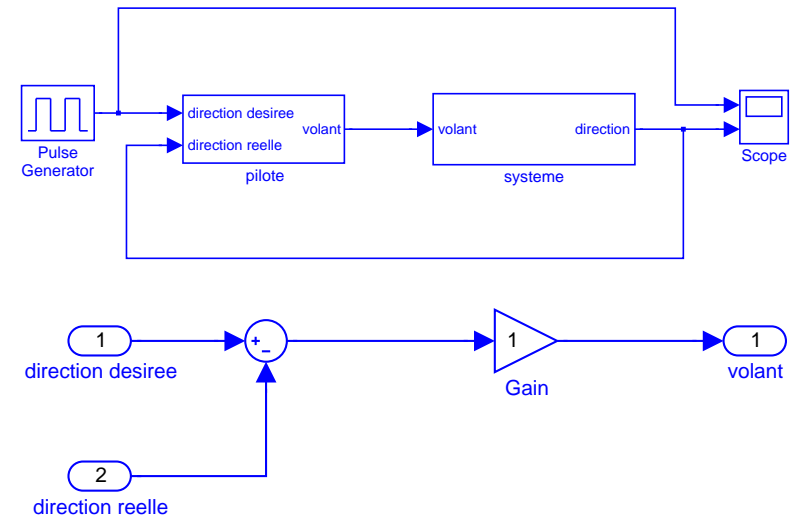
$$DR(s) = \frac{1}{s} V(s)$$

$$DR(s) = \frac{1}{s} V(s) = \frac{1}{s} (DD(s) - DR(s))$$

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right) DR(s) = \frac{1}{s} DD(s)$$

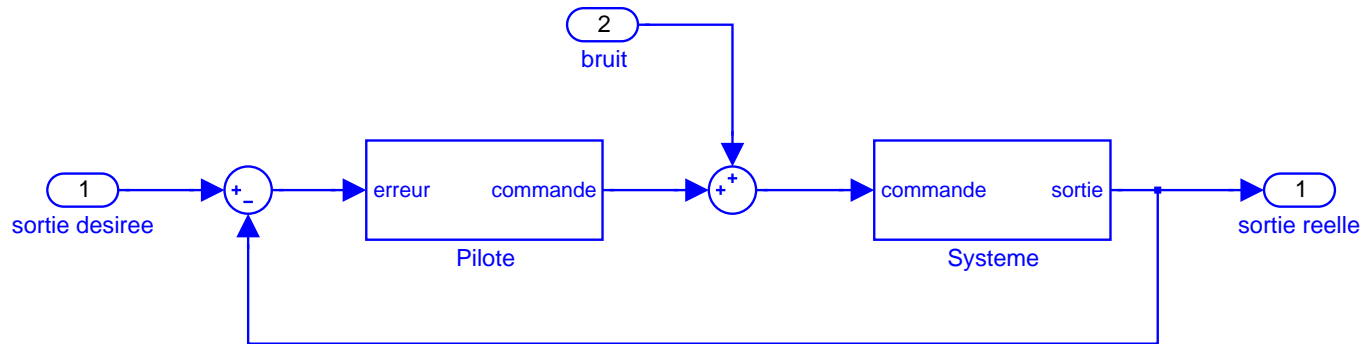
$$DR(s) = \frac{1}{s + 1} DD(s)$$

Le pôle vaut  $-1$  et est à partie réelle négative : le système piloté est stable



# Généralisation

Généralisons le schéma précédent :

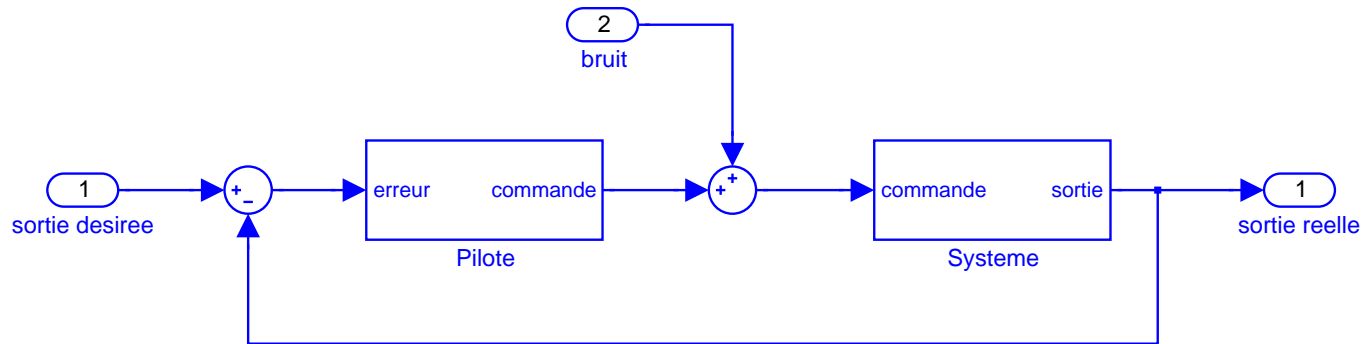


où

- le bruit (b) représente les perturbations et les erreurs de modélisation
- le pilote et le système sont supposés rationnels ( $P(s)$ ,  $S(s)$ )

# Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



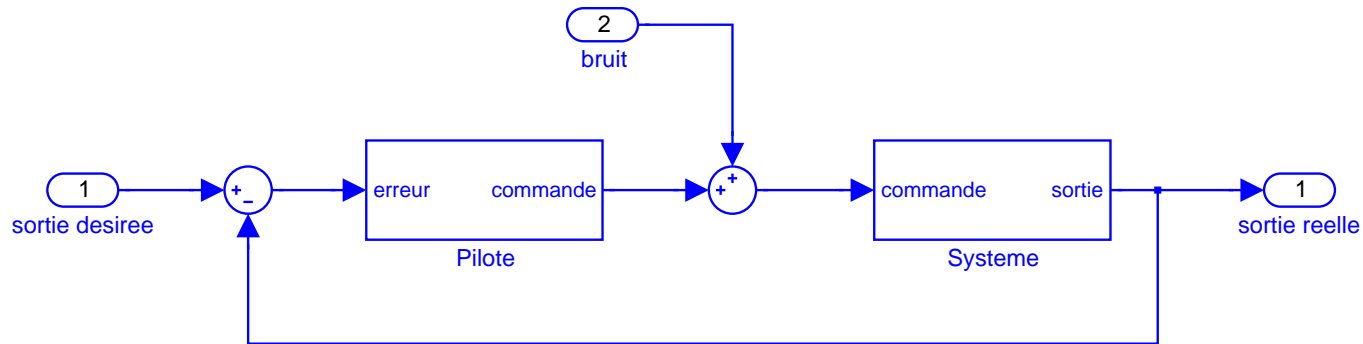
Calculons symboliquement le système :

$$S_r = S(P(S_d - S_r) + B)$$

$$(1 + SP)S_r = S(PS_d + B)$$

# Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



Calculons symboliquement le système :

$$S_r = S(P(S_d - S_r) + B)$$

$$(1 + SP)S_r = S(PS_d + B)$$

$$S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B$$

# Problème de la commande automatique

# Problème de la commande automatique

$$S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B$$

# Problème de la commande automatique

$$S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B$$

étant donné  $S$ , trouver  $P$  tel que

# Problème de la commande automatique

$$S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B$$

étant donné  $S$ , trouver  $P$  tel que

1.  $\frac{SP}{1 + SP}$  soit stable et proche de l'identité

fidélité

# Problème de la commande automatique

$$S_r = \frac{SP}{1 + SP} S_d + \frac{S}{1 + SP} B$$

étant donné  $S$ , trouver  $P$  tel que

1.  $\frac{SP}{1 + SP}$  soit stable et proche de l'identité

fidélité

2.  $\frac{S}{1 + SP}$  soit petit

robustesse (rejet des perturbations)

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel)  $P = a$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel)  $P = a$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel)  $P = a$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2 + a$$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel)  $P = a$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2 + a$$

C'est un polynôme du 2ème degré : les racines sont imaginaires pures

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel)  $P = a$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2 + a$$

C'est un polynôme du 2ème degré : les racines sont imaginaires pures

pas stable !!!

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

*(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)*

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

On choisit des racines stables :

$$(s + 1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

On choisit des racines stables :

$$(s + 1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$$

On identifie :  $c = 1, d = 2.4, a = 2.4, b = 1$

## Exemple : commande PID

On considère le système  $S = \frac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote (proportionnel, différentiel)  $P = \frac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de  $\frac{SP}{1 + SP}$

$$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$$

C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

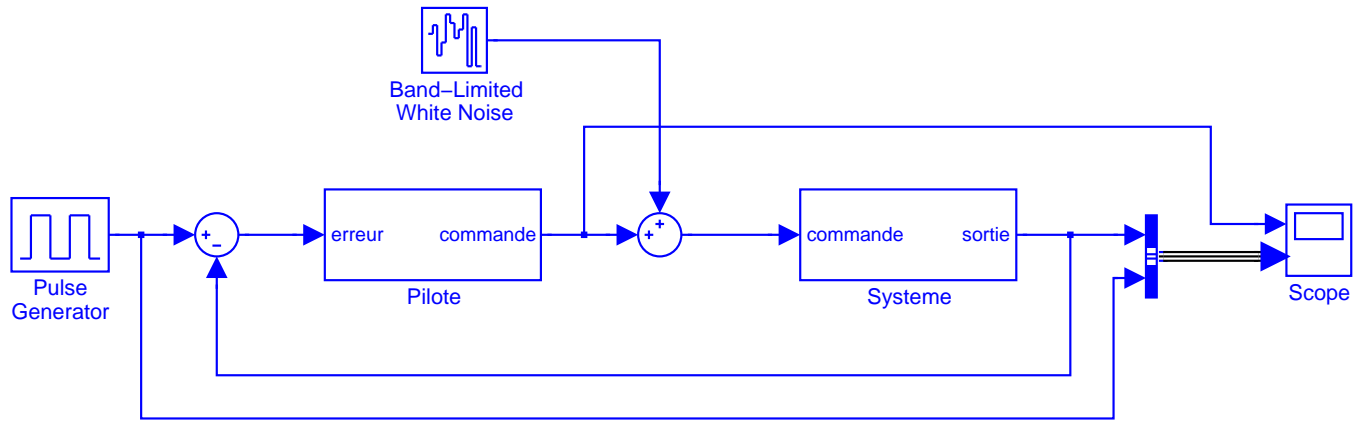
On choisit des racines stables :

$$(s + 1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$$

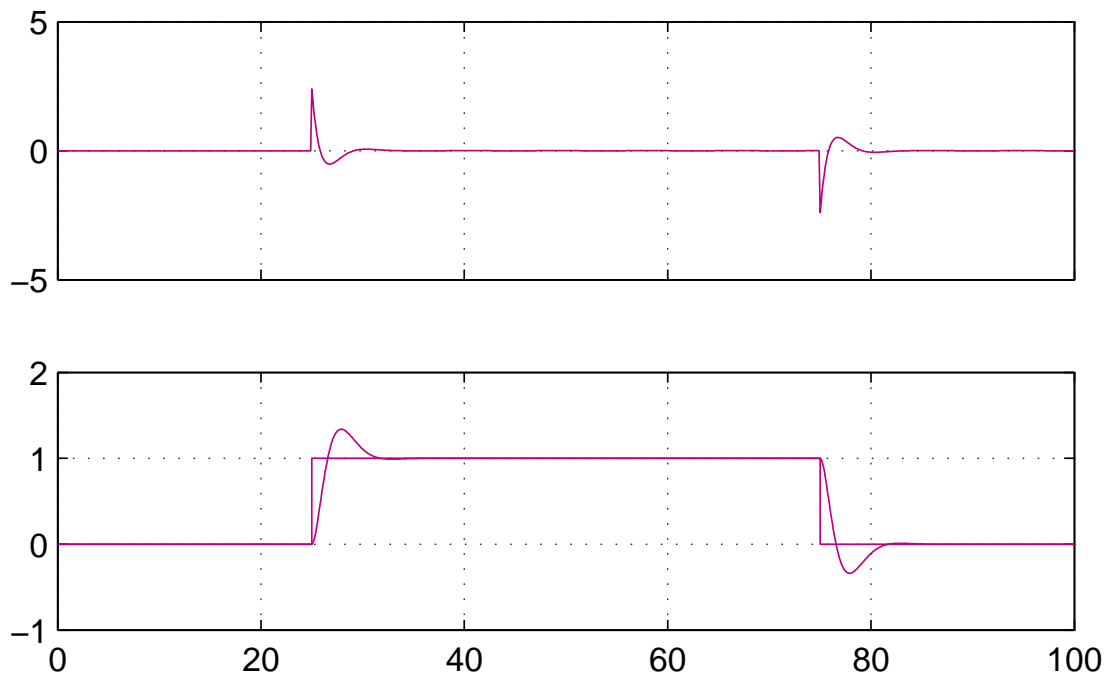
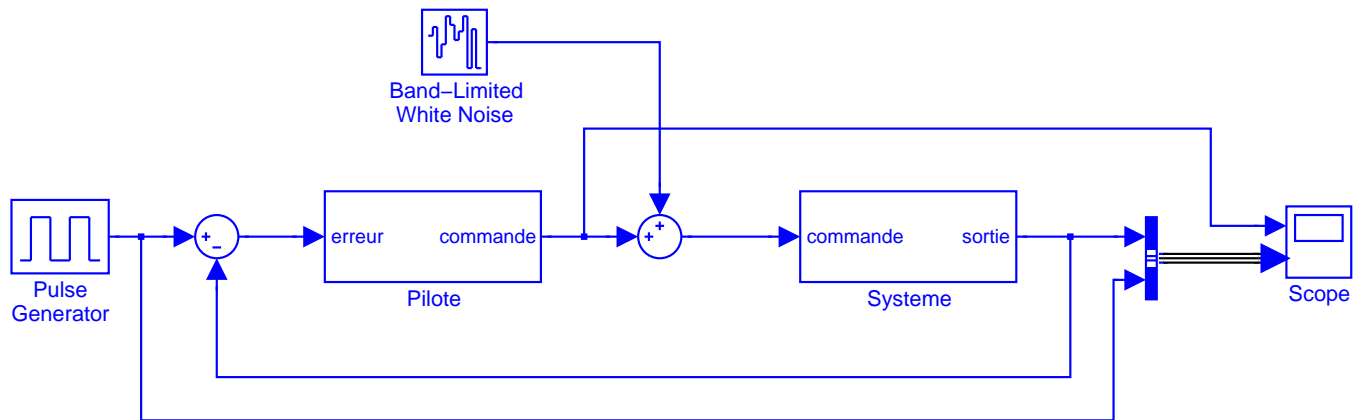
On identifie :  $c = 1, d = 2.4, a = 2.4, b = 1$

on essaie

# Simulation



# Simulation



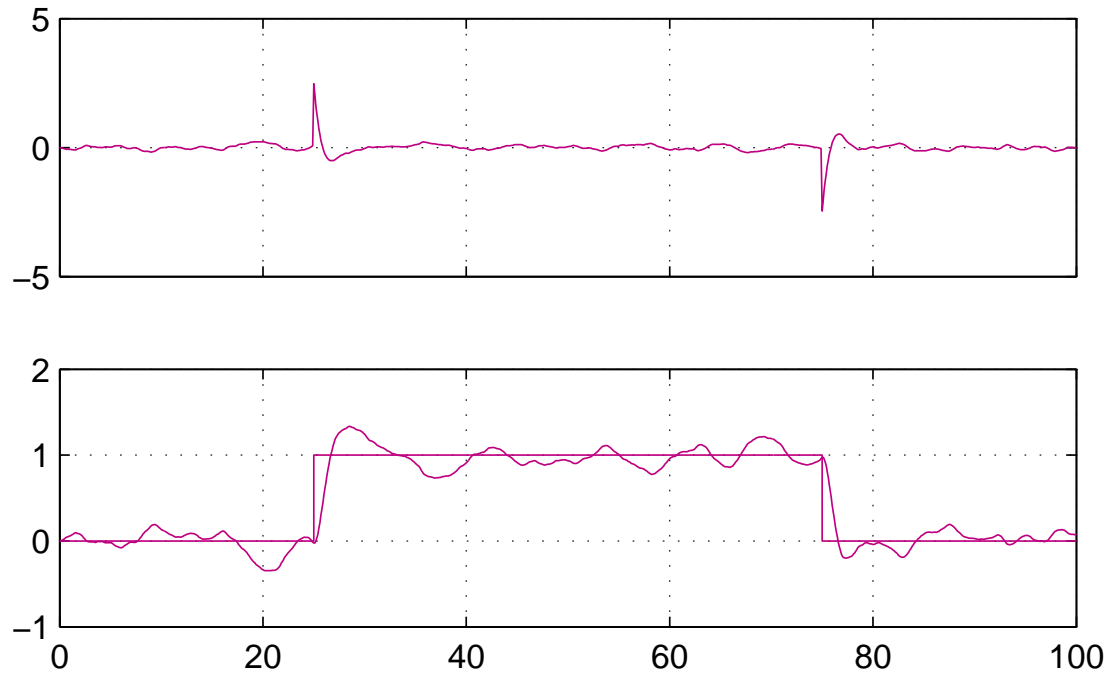
Time offset: 0

# Simulation

Avec perturbation

# Simulation

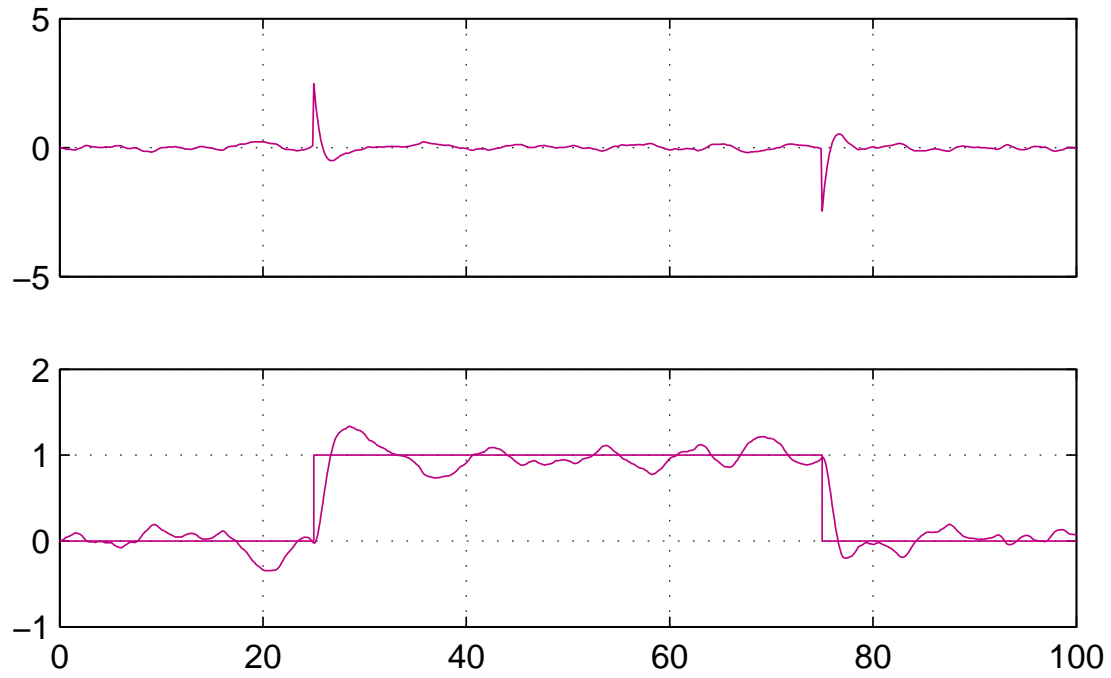
Avec perturbation



Time offset: 0

# Simulation

Avec perturbation



Time offset: 0

Pas terrible

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

## Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b} = \frac{d}{b}$$

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer  $\frac{d}{b}$

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer  $\frac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

$$(s + 1)(s - 2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - 2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + 2\sqrt{2}s + 4) = s^3 + 3.8s^2 + 6.8s + 4$$

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer  $\frac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

$$(s + 1)(s - 2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - 2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + 2\sqrt{2}s + 4) = s^3 + 3.8s^2 + 6.8s + 4$$

On identifie :  $c = 1, d = 3.8, a = 6.8, b = 4$

# Rejet de perturbations

On calcule  $\frac{S}{1 + SP} = \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b}$

On calcule le **Gain** : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{S}{1 + SP} \frac{1}{s} \right)$$

$$G = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{cs + d}{cs^3 + ds^2 + as + b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer  $\frac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

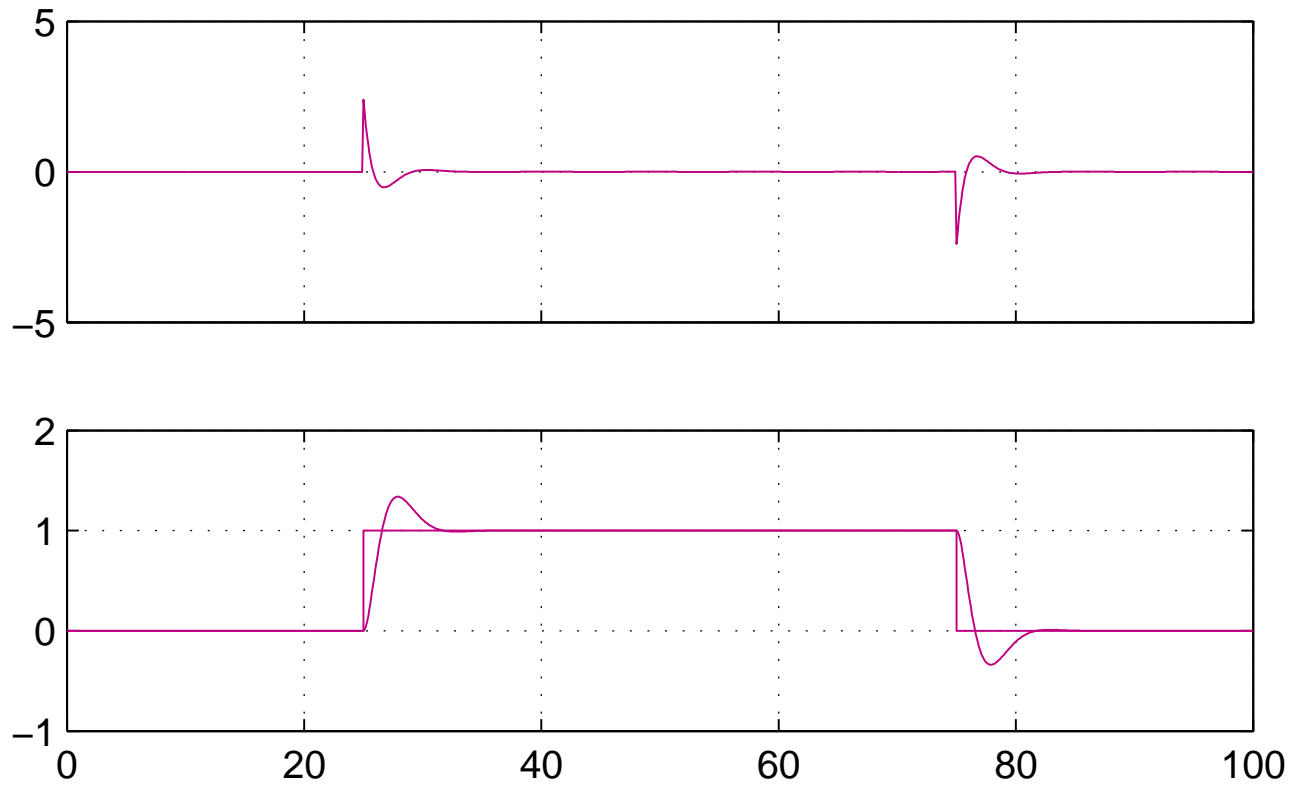
$$(s + 1)(s - 2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - 2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + 2\sqrt{2}s + 4) = s^3 + 3.8s^2 + 6.8s + 4$$

On identifie :  $c = 1, d = 3.8, a = 6.8, b = 4$

on essaie

# Sans perturbation

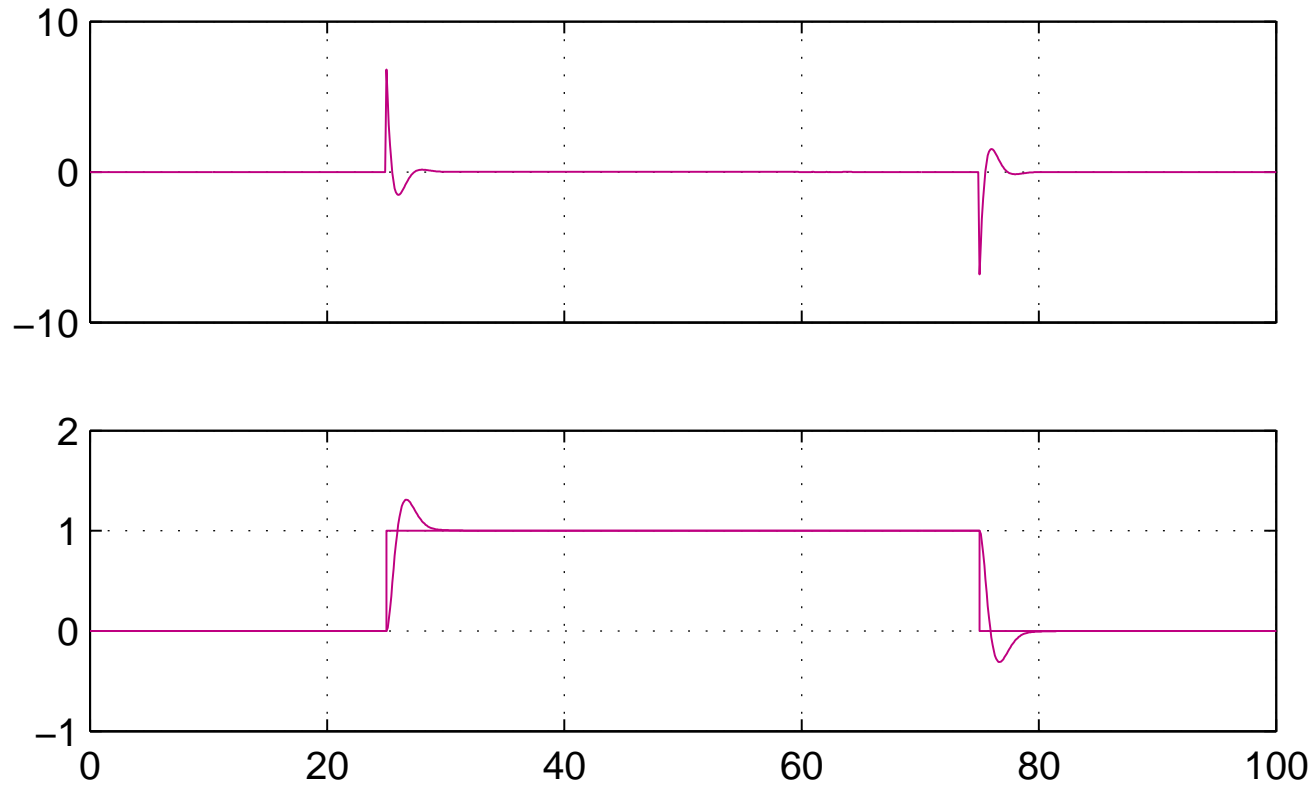
Avant



Time offset: 0

# Sans perturbation

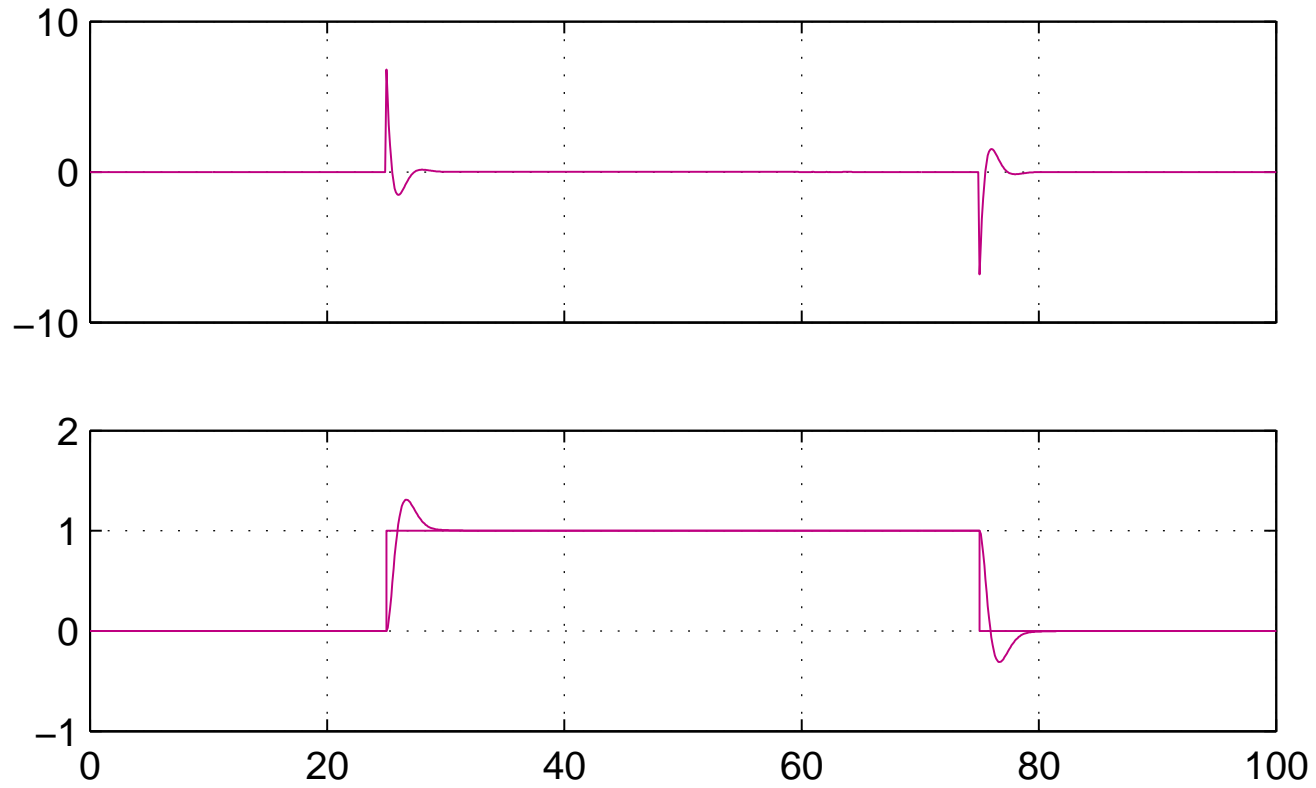
Après



Time offset: 0

# Sans perturbation

Après

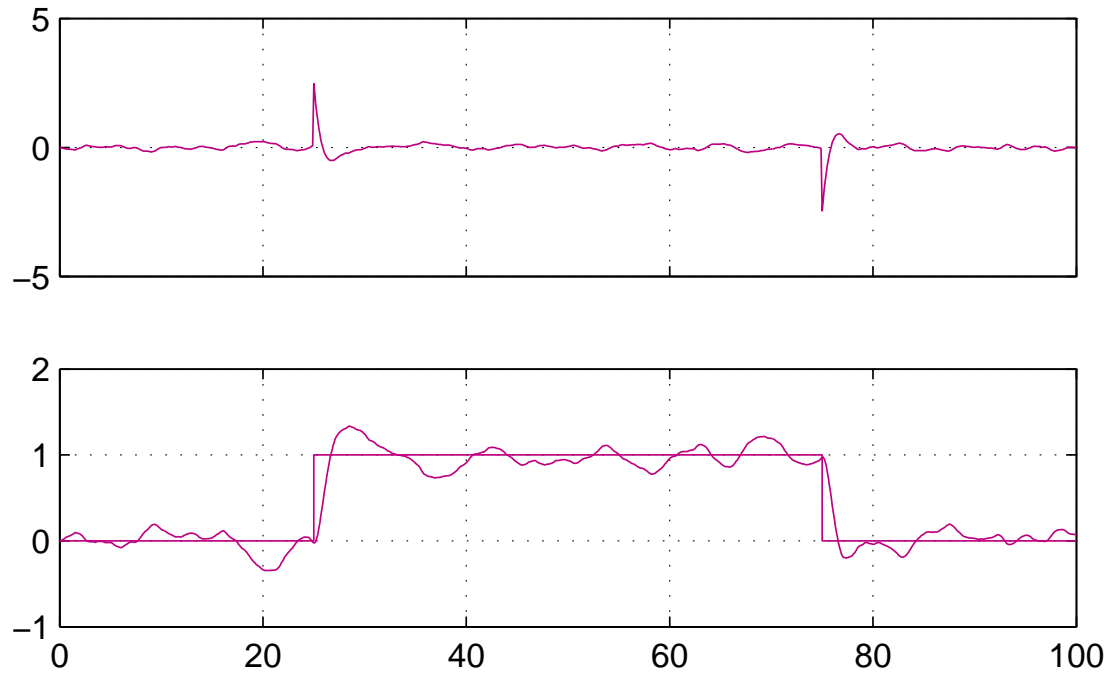


Time offset: 0

Pareil

# Avec perturbation

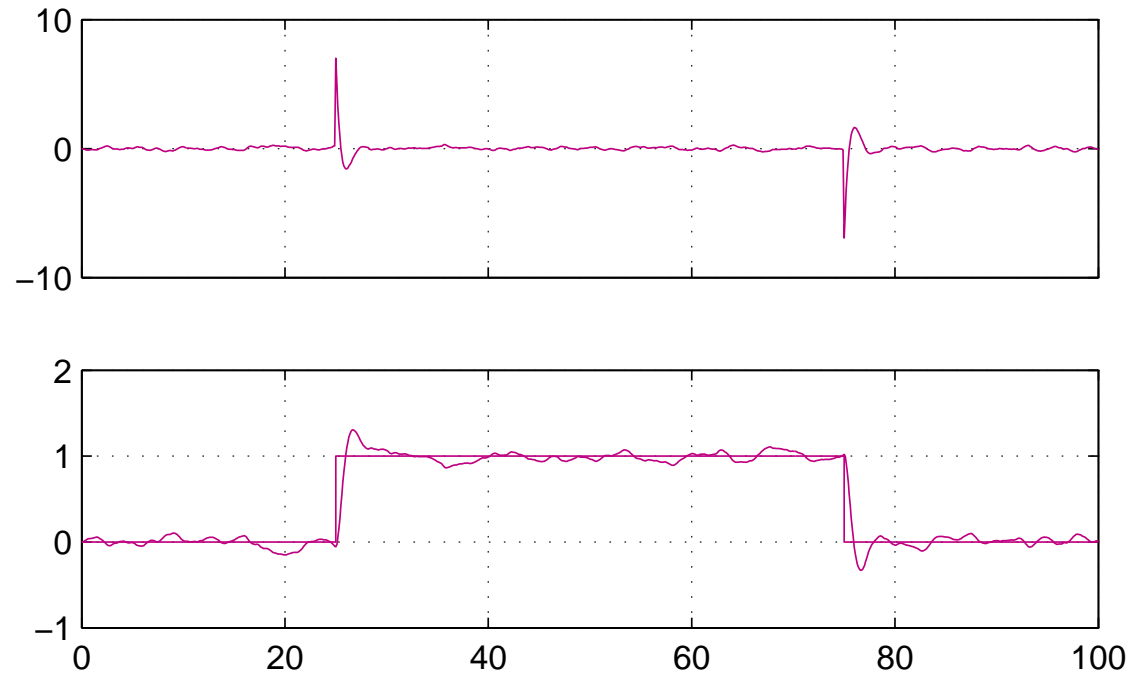
Avant



Time offset: 0

# Avec perturbation

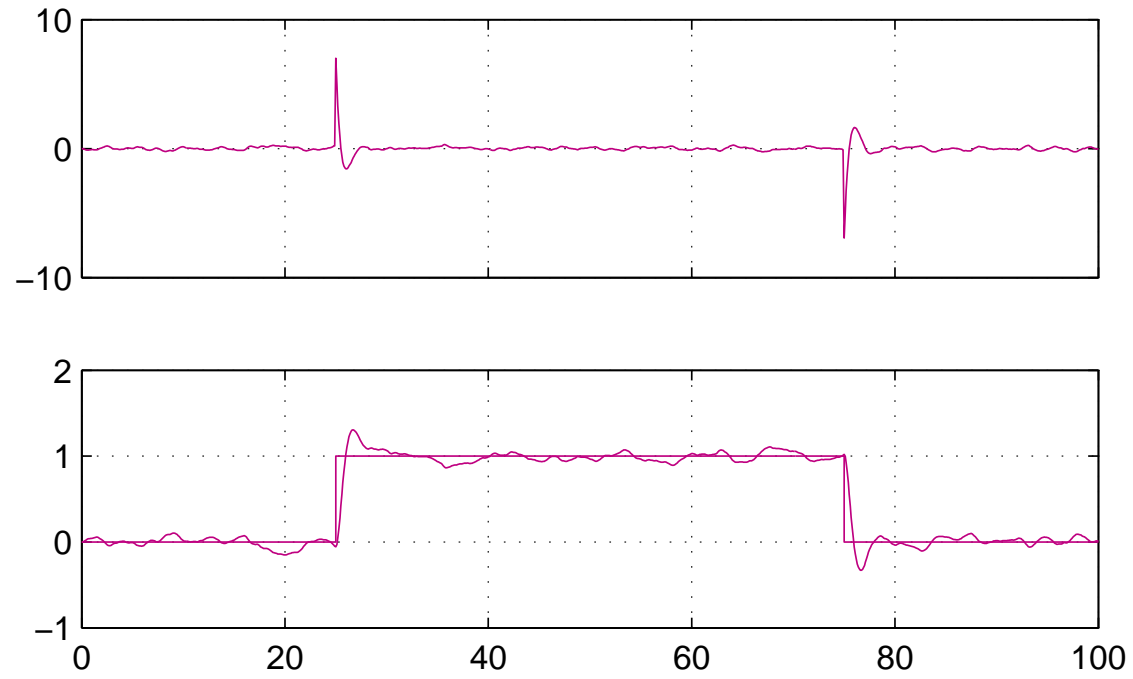
Après



Time offset: 0

# Avec perturbation

Après

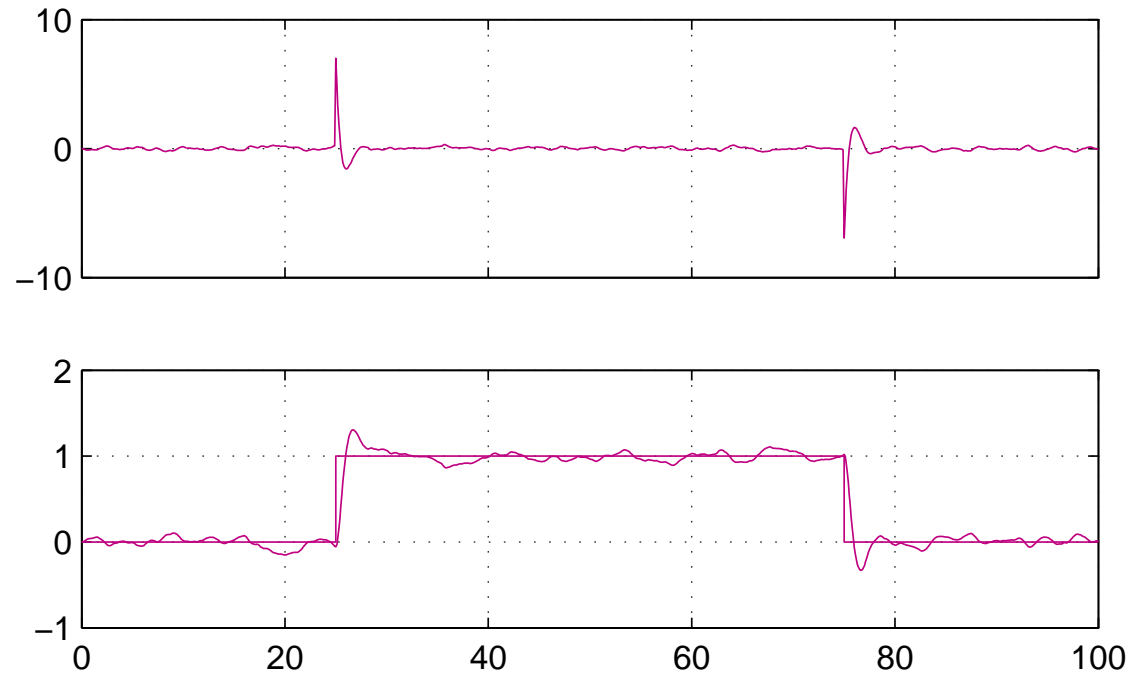


Time offset: 0

Meilleur

# Avec perturbation

Après



Time offset: 0

Meilleur

On est content

# Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

# Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

exemple :

	système	instable
+	pilote	stable
<hr/>		
	système composé	stable

# Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

exemple :

	système	instable
+	pilote	stable
<hr/>		
	système composé	stable

Tous les cas de figure sont possibles

Il faut faire attention

# Sinus et cosinus

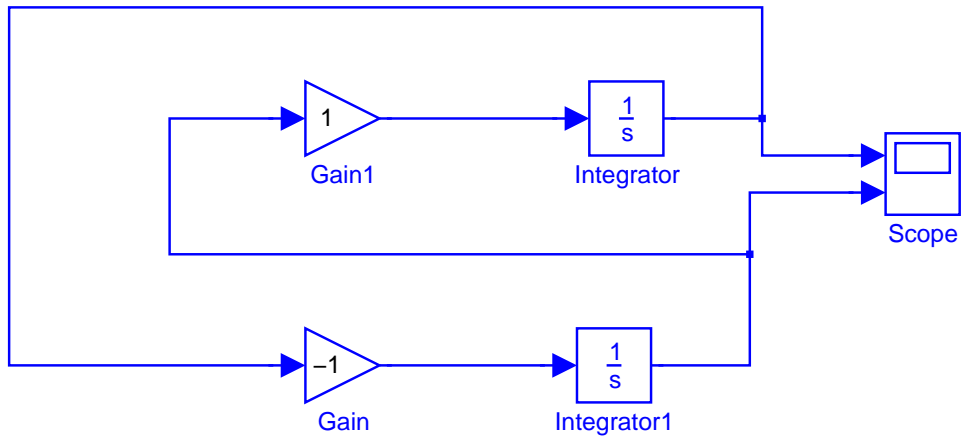
$$x' = y$$

$$y' = -x$$

# Sinus et cosinus

$$x' = y$$

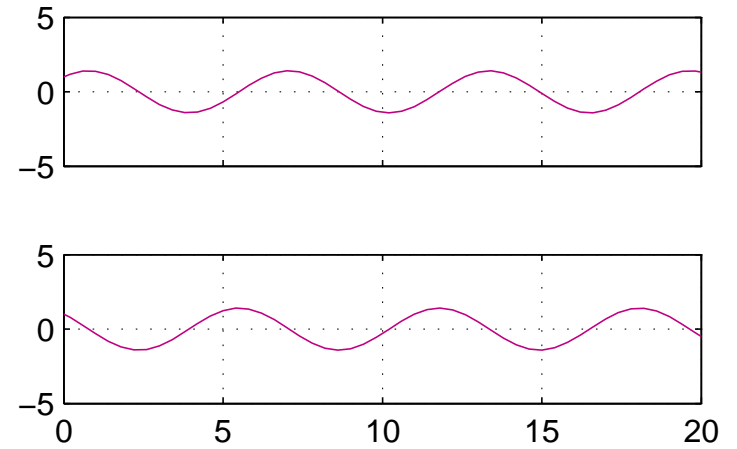
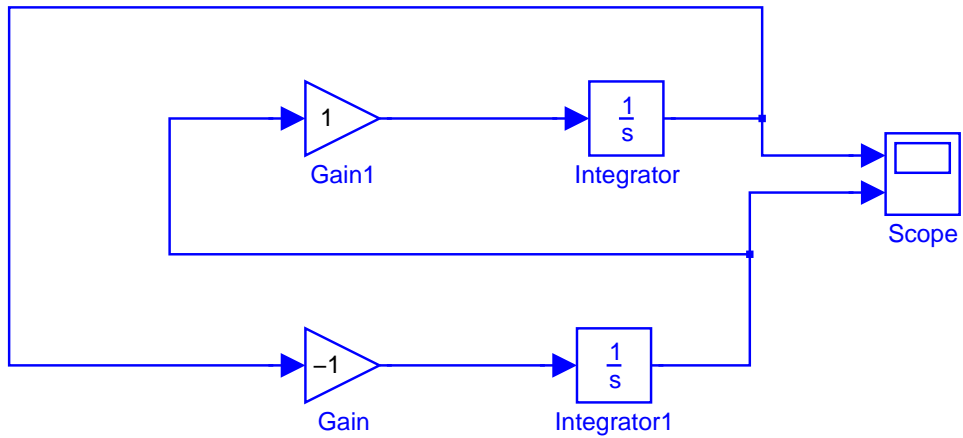
$$y' = -x$$



# Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

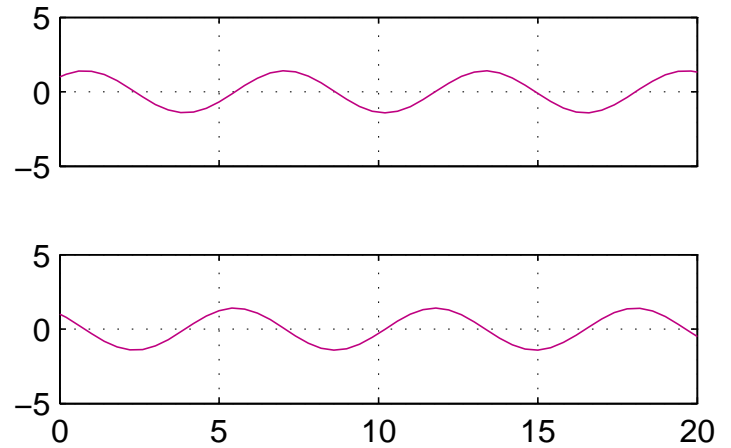
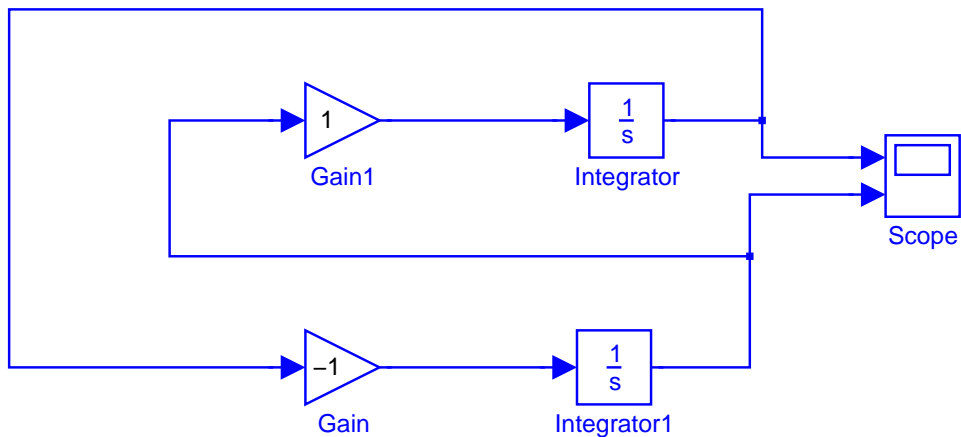


Time offset: 0

# Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$



Time offset: 0

Phénomène oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov

# Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while (c) I;` termine ?

# Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while (c) I;` termine ?

Trouver une fonction entière  $t$  de la mémoire du programme, telle que :

1. il existe un entier  $k$  avec

$$\{t < k\} \Rightarrow \{\text{not } c\}$$

# Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while (c) I ;` termine ?

Trouver une fonction entière  $t$  de la mémoire du programme, telle que :

1. il existe un entier  $k$  avec

$$\{t < k\} \Rightarrow \{\text{not } c\}$$

2.  $t$  décroît au cours de la boucle :

$$[I] \{t = n\} \Rightarrow \{t > n\}$$

# Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while (c) I ;` termine ?

Trouver une fonction entière  $t$  de la mémoire du programme, telle que :

1. il existe un entier  $k$  avec

$$\{t < k\} \Rightarrow \{\text{not } c\}$$

2.  $t$  décroît au cours de la boucle :

$$[I] \{t = n\} \Rightarrow \{t > n\}$$

(où  $[I] \{t = n\}$  est la plus faible pré-condition du prédicat  $\{t = n\}$  par le programme  $[I]$ )

# Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système (linéaire ou non-linéaire)

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie »  $E$  telle que

# Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système (linéaire ou non-linéaire)

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie »  $E$  telle que

1. il existe un minimum  $e : \forall X : E(X) > e$

# Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système (linéaire ou non-linéaire)

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie »  $E$  telle que

1. il existe un minimum  $e : \forall X : E(X) > e$
2.  $E$  décroît strictement le long des trajectoires de  $S : \forall X : \frac{\partial E}{\partial X}(X) \cdot F(X) < 0$

# Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système (linéaire ou non-linéaire)

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie »  $E$  telle que

1. il existe un minimum  $e : \forall X : E(X) > e$
2.  $E$  décroît strictement le long des trajectoires de  $S : \forall X : \frac{\partial E}{\partial X}(X) \cdot F(X) < 0$

Pour un cycle limite :

# Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système (linéaire ou non-linéaire)

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie »  $E$  telle que

1. il existe un minimum  $e : \forall X : E(X) > e$
2.  $E$  décroît strictement le long des trajectoires de  $S : \forall X : \frac{\partial E}{\partial X}(X) \cdot F(X) < 0$

Pour un cycle limite :

$E$  décroît le long des trajectoires de  $S : \forall X : \frac{\partial E}{\partial X}(X) \cdot F(X) \leq 0$

# Méthode de Lyapunov - remarques

## Remarques

- Le point d'énergie nulle est un point d'équilibre
- La stabilité asymptotique  $\Rightarrow$  la convergence de l'énergie vers un minimum
- L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie

## Avantages de la méthode de Lyapunov

- Applicable aux systèmes linéaire et non-linéaires
- Ne nécessite ni la solution de l'équation différentielle, ni la connaissance des pôles du système dans le cas linéaire
- On peut étudier la stabilité du système par un examen de l'énergie du système

## Observation physique

- Si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue, alors le système devra rejoindre un point d'équilibre

# Application aux systèmes linéaires

Considérons le système  $X'(t) = AX(t)$  et une fonction candidate de Lyapunov quadratique :  $E(X) = X^T P X$

Le système est stable ssi

$$\forall Q = Q^T > 0 \exists P > 0 : A^T P + P A + Q = 0 \quad (1)$$

On va prouver que si la condition (1) implique la stabilité. Considérons la dérivée  $\frac{dE(X)}{dt}$  le long des trajectoires :

$$\begin{aligned} \frac{dE(X)}{dt} &= \frac{dX^T}{dt} P X + X^T P \frac{dX}{dt}, \\ &= (AX)^T P X + X^T P A X, \quad (\text{car } dX/dt = X' = AX) \\ &= X^T A^T P X + X^T P A X = X^T (A^T P + P A) X, \\ &= X^T (-Q) X, \quad (\text{car } A^T P + P A = -Q) \\ &= X^T (-Q) X < 0 \quad (\text{car } Q > 0). \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $X$  on a : (i)  $E(X)$  et ses dérivées partielles sont continues ; (ii)  $E(X) > 0$  ; (iii)  $dE(X)/dt < 0$ . On peut donc conclure que le système est stable.

# Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

# Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

$$E(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$$

# Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

$$E(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$$

Condition de Lyapunov :

$$\frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' \leq 0$$

# Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

$$E(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$$

Condition de Lyapunov :

$$\frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' \leq 0$$

$$2xy - 2yx \leq 0$$

# Sinus et cosinus

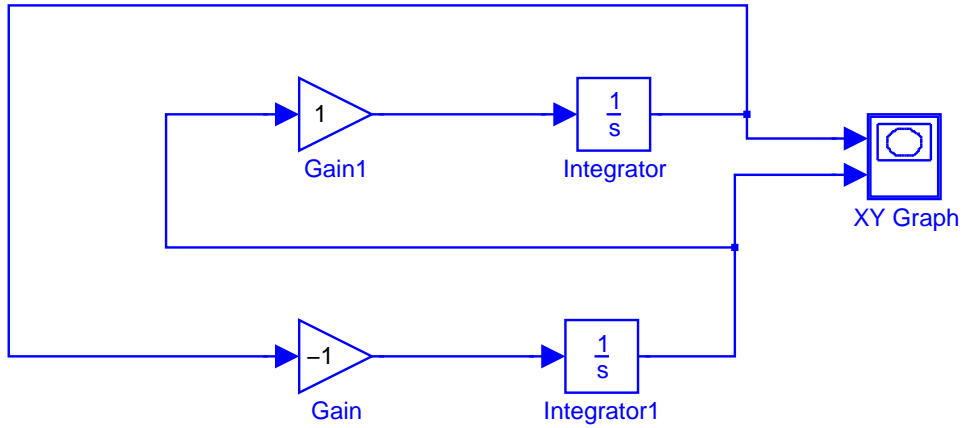
$$x' = y$$

$$y' = -x$$

# Sinus et cosinus

$$x' = y$$

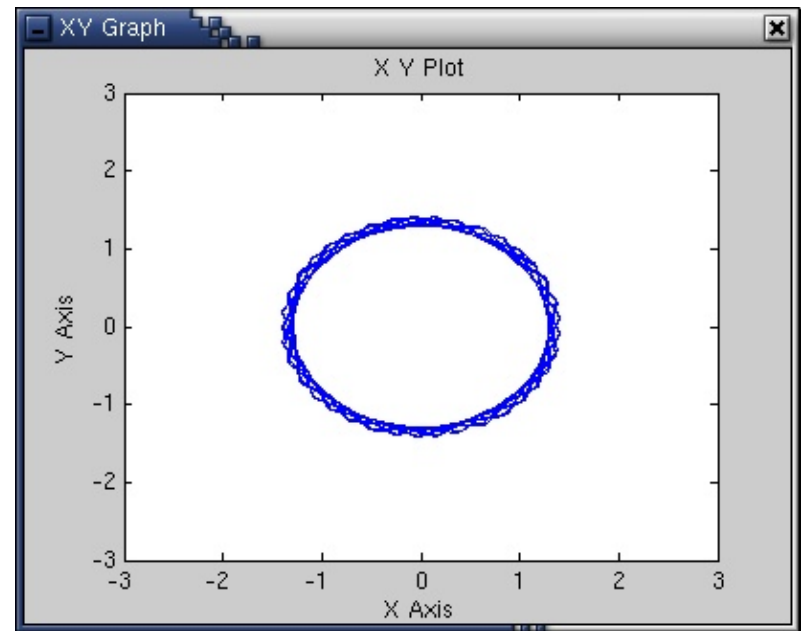
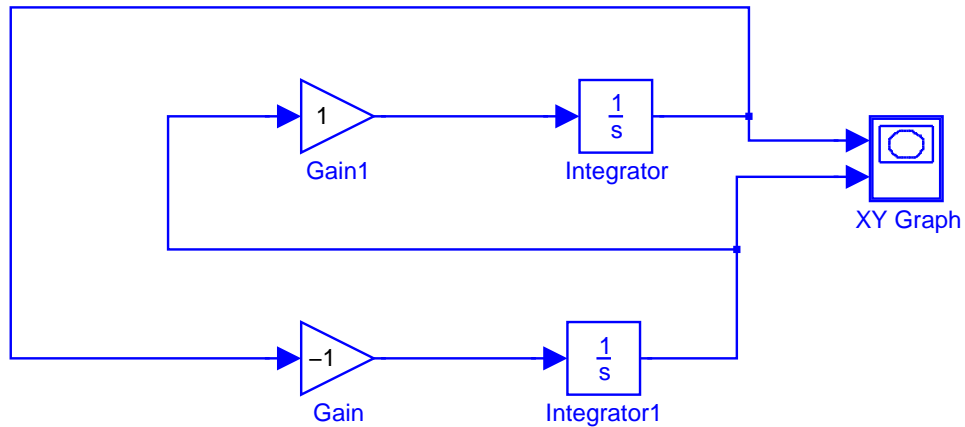
$$y' = -x$$



# Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$



Phénomène oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov