

Caractérisations des signaux et systèmes

- Point de vue dénotationnel
- Point de vue structurel
- Point de vue comportemental

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

- T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

- T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)
- D_X est le type du signal, R , N , $Bool$

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

- T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)
- D_X est le type du signal, R , N , $Bool$

Un système est un transformateur de signaux :

Par exemple

$$S : (T \rightarrow D_U) \rightarrow (T \rightarrow D_Y)$$

Définir un système dynamique

Un système est un transformateur de signaux $S : (T \rightarrow D_U) \rightarrow (T \rightarrow D_Y)$

On s'intéresse à la relation d'entrée/sortie

Pour définir un système

- Identifier des entrées et des sorties : une usine (entrées : matières premières, sorties : produits). Un ordinateur (entrées/sorties : informations venant des périphériques d'entrée/sorties)
- Choisir le type des signaux d'entrée et de sortie : D_U et D_Y
- Choisir le domaine de temps $T : Z, N$ (temps discret), ou R, R_+ (temps continu), ou ensemble de moments d'occurrence de certains événements.

Définir directement la fonction S est difficile !!

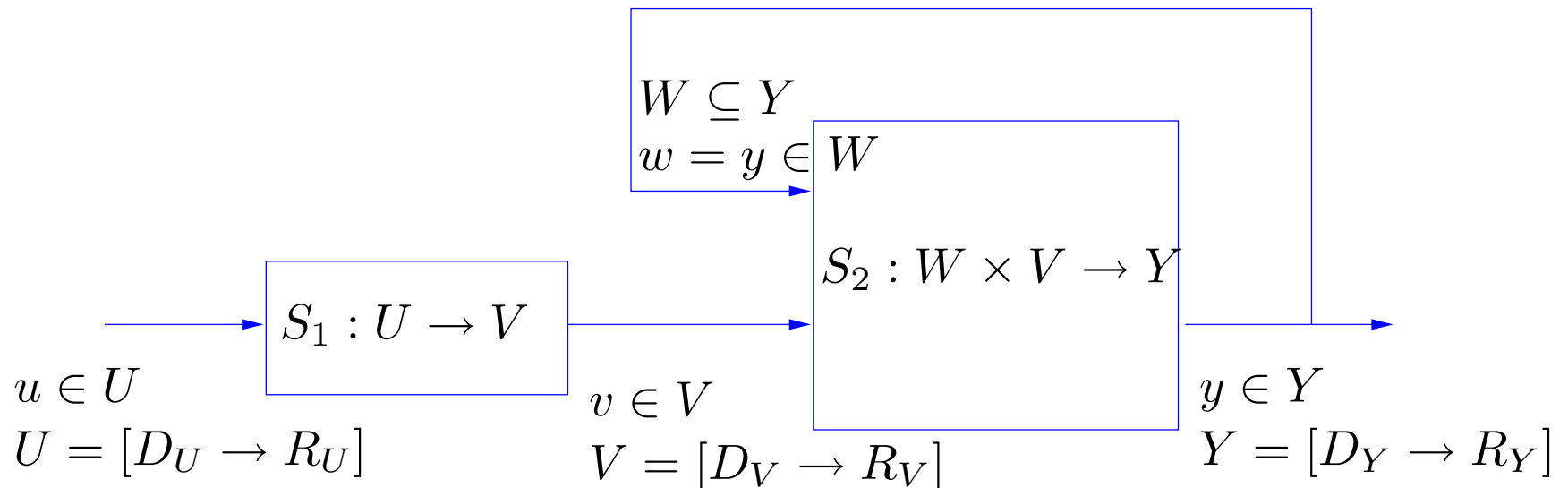
Outils d'analyse associés

Pour les systèmes temps-continu : calculs différentiels et intégrals

Pour les systèmes temps-discret : algèbre

Composition en utilisant des blocs diagrammes

- Blocs diagrammes : description graphique des connexions entre des composants.
Chaque composant est associé à une fonction de transformation de signaux
- Connexion \Rightarrow composition des fonctions.
- Hiérarchique, facile à comprendre.
- (Nous reparlerons des blocs diagrammes plus tard !!)



Le système global $S_3 : U \rightarrow Y$ t.q. $\forall u \in U : S_3(u) = S_2(S_3(u), S_1(u))$

La connexion entre y et w est appelé **'feedback'**. Il faut résoudre l'équation

$$z = S_2(z, S_1(z))$$

Notion d'état

- Afin de spécifier la fonction S , on a souvent besoin d'un ensemble \mathcal{X} d'états internes.
- L'état est une représentation compacte de l'activité du passé du système qui est suffisante pour déterminer les sorties à partir des entrées et pour mettre à jour l'état.
- Plus formellement, l'état $X(t)$ est un vecteur contenant le nombre minimal de variables t.q. si pour t_0 , $X(t_0)$ est connu alors $Y(t_1)$ et $X(t_1)$ peuvent être déterminés de manière unique pour tout t_1 et t_0 si $U(t)$ est connu sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

Exemple d'un condensateur. $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- Remarques : - Spécifier $v(t_0)$ est plus "économique" que spécifier toute l'évolution $i(t)$ de $t = -\infty$ jusqu'à $t = t_0$. L'état à l'instant t_0 du système doit constituer sa mémoire
- Le choix de représentation d'état n'est pas unique

Description mathématique d'un système dynamique

- \mathcal{X} est l'ensemble de tous les états possibles (espace d'état)
- Ω est l'ensemble de signaux d'entrée **admissibles**
- $\Phi : T \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ (**fonction de transition 'globale', flot**)

$X = \Phi(t, X_0, U(\cdot))$ état du système à l'instant t pourvu que l'état du système à l'instant 0 est X_0 et l'entrée est $U(\cdot) \in \Omega$

La fonction Φ satisfait :

1. conditions de cohérence :

- $\forall X \in \mathcal{X} \forall U(\cdot) \in \Omega : \Phi(0, X, U(\cdot)) = X$
- $\Phi(t, \Phi(t_1, X_0, U(\cdot))) = \Phi(t + t_1, X_0, U(\cdot))$ pour tout $t_1 \geq 0$ et $t \geq 0$

2. condition de causalité :

$$\Phi(t, X_0, U(\cdot)) = \Phi(t, X_0, U_1(\cdot)) \text{ if } \forall \tau \in [0, t] : U(\tau) = U_1(\tau)$$

Description mathématique d'un système dynamique (suite)

Systèmes temps-discret

- La fonction de transition globale Φ peut être obtenue par une application itérative de la fonction de transition locale qui spécifie l'état successeur ('next') :

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n)$$

Systèmes temps-continu

- À partir d'une description locale en considérant la dérivée de la fonction de transition $\partial\Phi/\partial t$, on obtient :

$$\dot{X}(t) = X'(t) = F(X(t), U(t))$$

- F doit satisfaire certaines conditions (e.g. Lipschitz)

Point de vue structurel

Systeme de premier ordre (deuxième ordre, ...):

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...):

| différentiel | récurrent, automate, programme objet |
|----------------|--------------------------------------|
| $X(0)$ | $X(0)$ |
| $X' = F(X, U)$ | $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ |
| $Y = G(X, U)$ | $Y_n = G(X_n, U_n)$ |

Ordre du système : dimension du vecteur X

Remarque : pas intrinsèque

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...):

| différentiel | récurrent, automate, programme objet |
|----------------|--------------------------------------|
| $X(0)$ | $X(0)$ |
| $X' = F(X, U)$ | $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ |
| $Y = G(X, U)$ | $Y_n = G(X_n, U_n)$ |

Ordre du système : dimension du vecteur X

Remarque : pas intrinsèque

Système d'état fini :

Automate, machine d'état fini

Point de vue comportemental

Point de vue comportemental

Systeme linéaire :

Point de vue comportemental

Systeme linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prête à la linéarité

Point de vue comportemental

Systeme linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prête à la linéarité

Systeme stationnaire :

Point de vue comportemental

Systeme linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prête à la linéarité

Systeme stationnaire :

Qui commute avec un retard :

$$S(x(t - \delta)) = (Sx)(t - \delta)$$

Les systèmes linéaires stationnaires forment une classe importante historiquement et pratiquement.

Systemes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systemes sont linéaires, stationnaires :

Systemes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systemes sont linéaires, stationnaires :

- Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

Systemes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systemes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

Systemes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systemes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

$$\mathcal{L}S(s)e^{-\delta s}\mathcal{L}x(s) = e^{-\delta s}\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Systèmes rationnels

Forme générale : $\frac{N(s)}{D(s)}$ avec degré $N \leq$ degré D .

$$Y(s) = \frac{\sum_0^n a_i s^i}{\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n} X(s)$$

$$\left(\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n\right)Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s)$$

$$s^n Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^i Y(s)$$

$$Y(s) = \sum_0^n a_i s^{i-n} X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^{i-n} Y(s)$$

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_0^{n-1} s^{i-n} (a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Systemes rationnels

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_0^{n-1} s^{i-n} (a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Posons :

$$U_0(s) = s^{-1} (a_0 X(s) - b_0 Y(s))$$

...

$$U_{i+1}(s) = s^{-1} (a_{i+1} X(s) - b_{i+1} Y(s) + U_i(s))$$

...

$$Y(s) = a^n X(s) + U_n(s)$$

Il est facile de vérifier algébriquement que ces deux expressions sont égales.

Systemes rationnels

$$U_0(s) = s^{-1}(a_0X(s) - b_0Y(s))$$

...

$$U_{i+1}(s) = s^{-1}(a_{i+1}X(s) - b_{i+1}Y(s) + U_i(s))$$

...

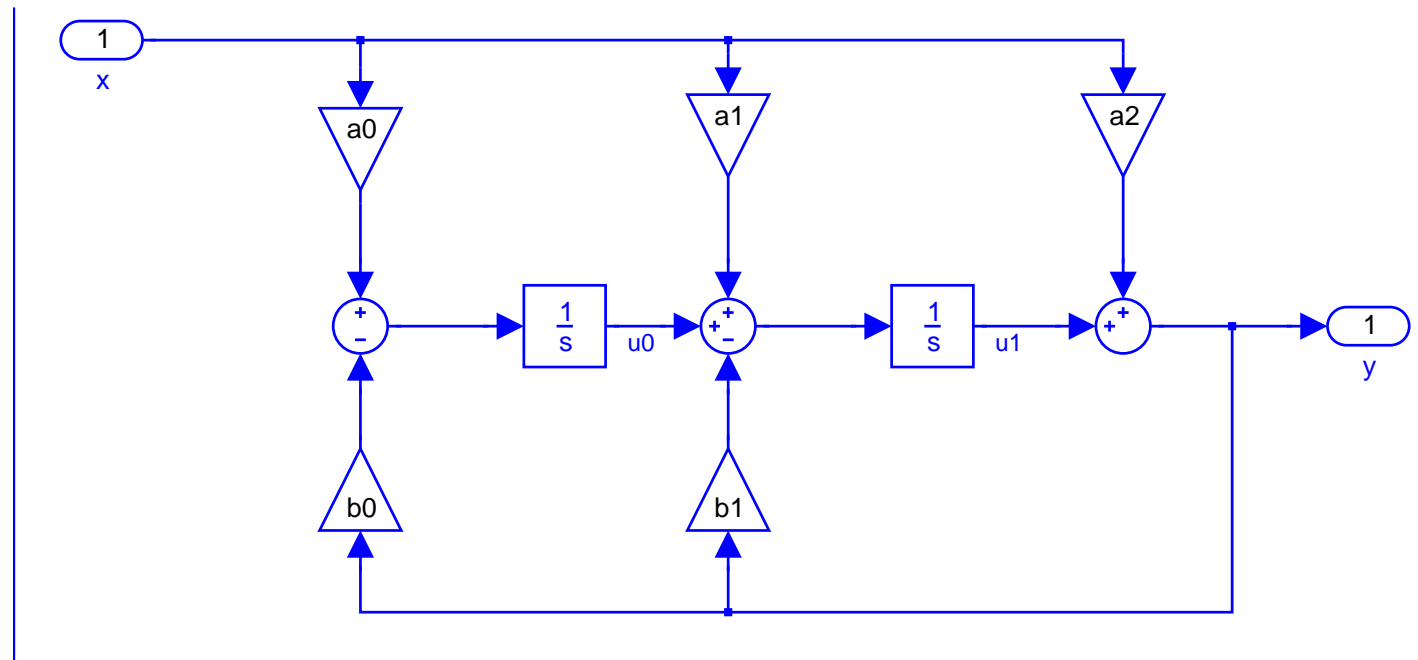
$$Y(s) = a^n X(s) + U_n(s)$$

Conclusion : pour simuler un systeme rationnel d'ordre n , il suffit d'utiliser n integrateurs.

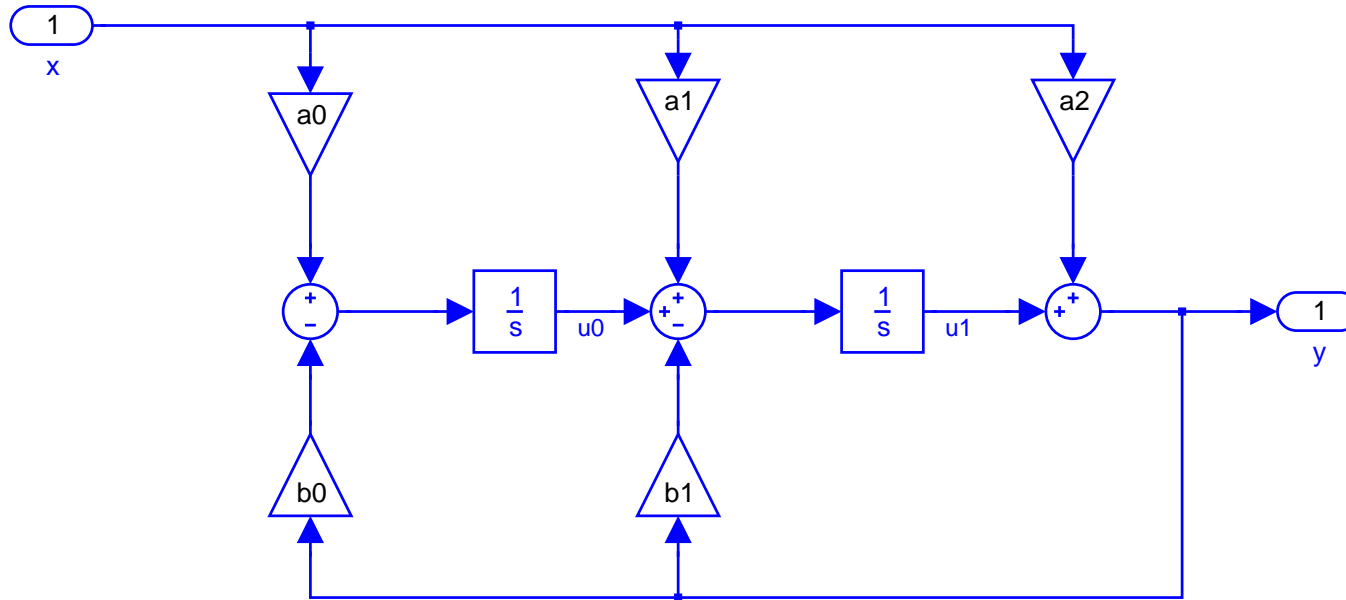
Systèmes rationnels

Exemple :

$$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



Systemes rationnels



$$U_0(s) = s^{-1}(a_0X(s) - b_0Y(s))$$

$$U_1(s) = s^{-1}(a_1X(s) - b_1Y(s) + U_0(s))$$

$$Y(s) = a_2X(s) + U_1(s)$$

$$Y(s) = a_2X(s) + s^{-1}(a_1X(s) - b_1Y(s) + s^{-1}(a_0X(s) - b_0Y(s)))$$

$$Y(s) = a_2X(s) + s^{-1}a_1X(s) + s^{-2}a_0X(s) - s^{-1}b_1Y(s) - s^{-2}b_0Y(s)$$

$$s^2Y(s) = a_2s^2X(s) + a_1sX(s) + a_0X(s) - b_1sY(s) - b_0Y(s)$$