Systèmes dynamiques : Modélisation

- Point de vue dénotationnel

- Point de vue structurel

- Point de vue comportemental

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \to D_X$$

où :

– T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \rightarrow D_X$$

où :

– T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)

– D_X est le type du signal, R, N, $Bool$

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$X : T \to D_X$$

où :

– T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)

– D_X est le type du signal, R, N, $Bool$

Un système est un transformateur de signaux :

Par exemple

$$S : (T \to D_U) \to (T \to D_Y)$$

Définir un système dynamique

Un système est un transformateur de signaux $S : (T \rightarrow D_U) \rightarrow (T \rightarrow D_Y)$
On s'intéresse à la relation d'entrée/sortie

Pour définir un système

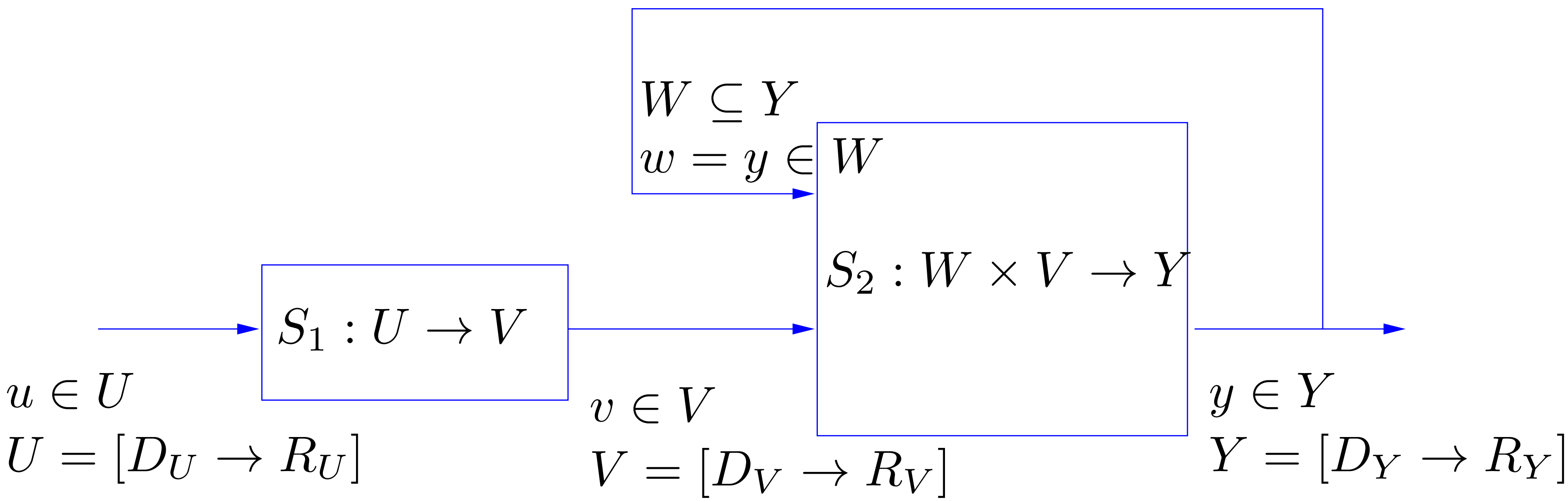
1. Identifier des entrées et des sorties :
   – une usine (entrées : matières premières, sorties : produits).
   – un robot LEGO sous forme de véhicule à 2 roues (entrées/sorties : vitesses de 2 roues/trajectoires du robot)
2. Choisir le type des signaux d'entrée et de sortie : D_U et D_Y
3. Choisir le domaine de temps T : Z, N (temps discret), ou R, R_+ (temps continu), ou ensemble de moments d'occurrence de certains événements.

Définir directement la fonction S est difficile ! !

Outils d'analyse associés
Pour les systèmes temps-continu : calculs différentiels et intégrals
Pour les systèmes temps-discret : algèbre

Composition en utilisant des blocs diagrammes

- Blocs diagrammes : description graphique des connexions entre des composants. Chaque composant est associé à une fonction de transformation de signaux
- Connexion $\Rightarrow$ composition des fonctions.
- Hiérarchique, facile à comprendre.



Le système global $S_3 : U \to Y$ t.q. $\forall u \in U : S_3(u) = S_2(S_3(u), S_1(u))$

La connexion entre y et w est appelée ‘feedback’. Il faut résoudre l’équation $z = S_2(z, S_1(z))$

Notion d'état

– Afin de spécifier la fonction S, on a souvent besoin d'un ensemble $\mathcal{X}$ d'états internes.

– L'état est une représentation compacte de l'activité du passé du système qui est suffisante pour déterminer les sorties à partir des entrées et pour mettre à jour l'état.

– Plus formellement, l'état $X(t)$ est un vecteur contenant le nombre minimal de variables t.q. si pour t_0, $X(t_0)$ est connu alors $Y(t_1)$ et $X(t_1)$ peuvent être déterminés de manière unique pour tout t_1 et t_0 si $U(t)$ est connu sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

Notion d'état

Exemple d'un condensateur

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Remarques :

– Spécifier $v(t_0)$ est plus "économique" que spécifier toute l'évolution $i(t)$ de $t = -\infty$ jusqu'à $t = t_0$. L'état à l'instant t_0 du système doit constituer sa mémoire

– Le choix de représentation d'état n'est pas unique

Description mathématique d'un système dynamique

- $\mathcal{X}$ est l'ensemble de tous les états possibles (espace d'état)
- Ω est l'ensemble de signaux d'entrée admissibles
- $\Phi : T \times \mathcal{X} \times \Omega \to \mathcal{X}$ (fonction de transition 'globale', flot)

$X = \Phi(t, X_0, U(\cdot))$ état du système à l'instant t pourvu que l'état du système à l'instant 0 est X_0 et l'entrée est $U(\cdot) \in \Omega$

La fonction Φ satisfait :

1. conditions de cohérence :
   - $\forall X \in \mathcal{X} \; \forall U(\cdot) \in \Omega : \; \Phi(0, X, U(\cdot)) = X$
   - $\Phi(t, \Phi(t_1, X_0, U(\cdot))) = \Phi(t + t_1, X_0, U(\cdot))$ pout tout $t_1 \geq 0$ et $t \geq 0$
2. condition de causalité :

$$\Phi(t, X_0, U(\cdot)) = \Phi(t, X_0, U_1(\cdot)) \;\text{ if }\; \forall \tau \in [0, t] : U(\tau) = U_1(\tau)$$

Description mathématique d'un système dynamique (suite)

Systèmes temps-discret

– La fonction de transition globale Φ peut être obtenue par une application itérative de la fonction de transtion locale qui spécifie l'état successeur ('next') :

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n)$$

Systèmes temps-continu

– À partir d'une description locale en considérant la dérivée de la fonction de transition $\partial\Phi/\partial t$, on obtient :

$$\dot{X}(t) = X'(t) = F(X(t), U(t))$$

– F doit satisfaire certaines conditions (e.g. Lipschitz)

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, . . .) :

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...) :

différentiel	récurrent, automate, programme objet
$$\begin{array}{rcl} X(0) & & \\ X' & = & F(X,U) \\ Y & = & G(X,U) \end{array}$$	$$\begin{array}{rcl} X(0) & & \\ X_{n+1} & = & F(X_n, U_{n+1}) \\ Y_n & = & G(X_n, U_n) \end{array}$$

Ordre du système : dimension du vecteur X

Remarque : pas intrinsèque

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...) :

différentiel	récurrent, automate, programme objet
$X(0)$	$X(0)$
$X' = F(X,U)$	$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$
$Y = G(X,U)$	$Y_n = G(X_n, U_n)$

Ordre du système : dimension du vecteur X

Remarque : pas intrinsèque

Système d'état fini :

Automate, machine d'état fini

Point de vue comportemental

Point de vue comportemental

Système linéaire :

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Système stationnaire :

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

Remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Système stationnaire :

Qui commute avec un retard :

$$S(x(t - \delta)) = (Sx)(t - \delta)$$

Les systèmes linéaires stationnaires forment une classe importante historiquement et pratiquement.

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha \mathcal{L}x_1(s) + \beta \mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

$$\mathcal{L}S(s)e^{-\delta s}\mathcal{L}x(s) = e^{-\delta s}\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Systèmes rationnels

Forme générale : $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ avec degré $N \leq$degré D.

$$Y(s) = \frac{\sum_0^n a_i s^i}{\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n} X(s)$$

$$(\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n) Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s)$$

$$s^n Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^i Y(s)$$

$$Y(s) = \sum_0^n a_i s^{i-n} X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^{i-n} Y(s)$$

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_0^{n-1} s^{i-n} (a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Systèmes rationnels

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_{0}^{n-1} s^{i-n}(a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Posons :

$$\begin{array}{rcl} U_0(s) & = & s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s)) \\ \ldots & & \\ U_{i+1}(s) & = & s^{-1}(a_{i+1} X(s) - b_{i+1} Y(s) + U_i(s)) \\ \ldots & & \\ Y(s) & = & a^n X(s) + U_n(s) \end{array}$$

Il est facile de vérifier algébriquement que ces deux expressions sont égales.

Systèmes rationnels

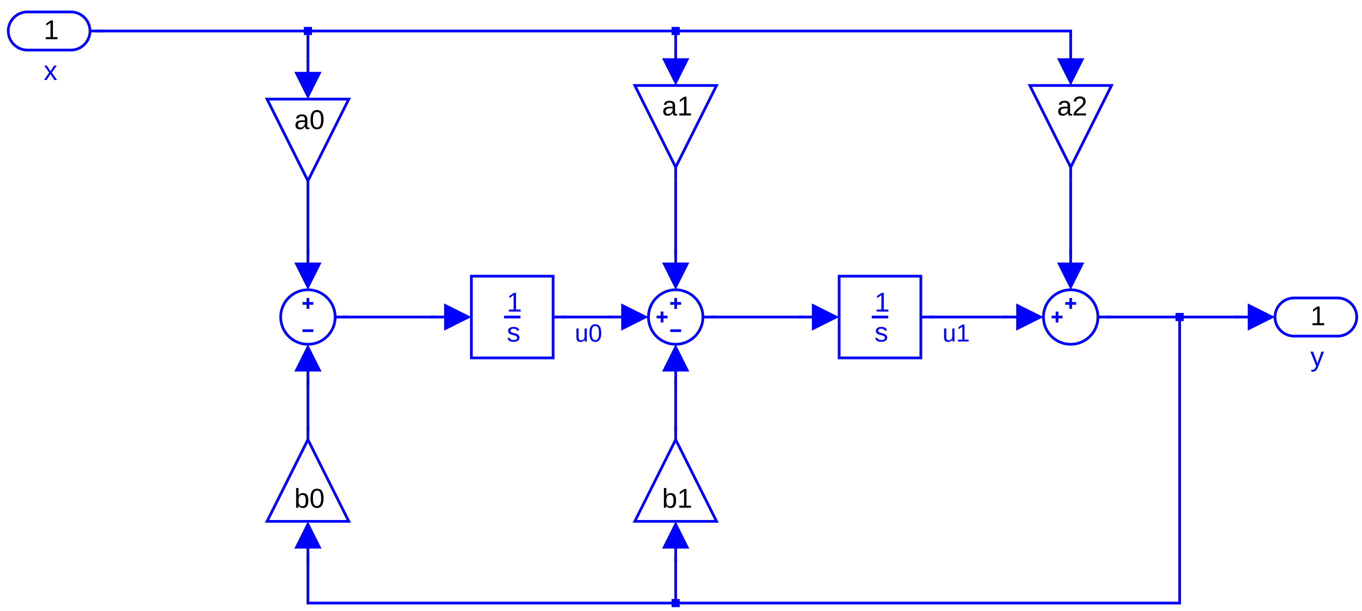
$$\begin{aligned} U_0(s) &= s^{-1}(a_0X(s) - b_0Y(s)) \\ &\dots \\ U_{i+1}(s) &= s^{-1}(a_{i+1}X(s) - b_{i+1}Y(s) + U_i(s)) \\ &\dots \\ Y(s) &= a^nX(s) + U_n(s) \end{aligned}$$

Conclusion : pour simuler un système rationnel d'ordre n, il suffit d'utiliser n intégrateurs.

Systèmes rationnels

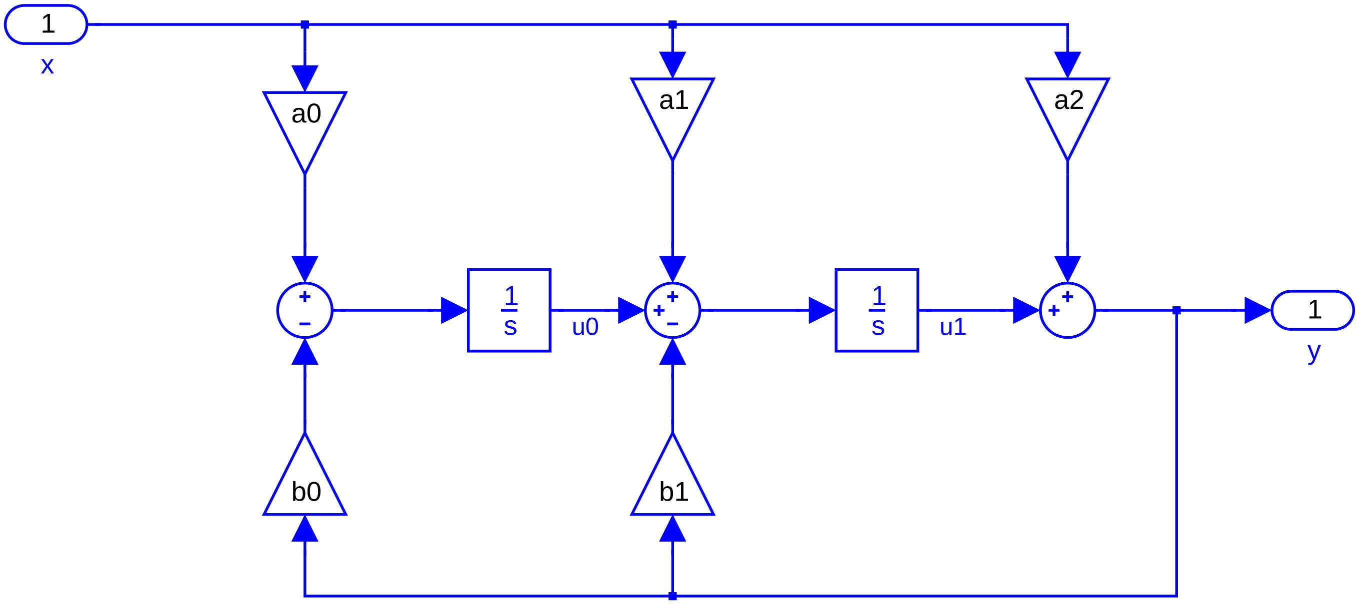
Exemple :

$$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



NB : Pour une fonction de transfert en z, $\dfrac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0}$ il suffit de remplacer le bloc $\dfrac{1}{s}$ par le bloc z^{-1}

Systèmes rationnels



$$
\begin{aligned}
U_0(s) &= s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s)) \\
U_1(s) &= s^{-1}(a_1 X(s) - b_1 Y(s) + U_0(s)) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + U_1(s) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + s^{-1}(a_1 X(s) - b_1 Y(s) + s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s))) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + s^{-1} a_1 X(s) + s^{-2} a_0 X(s) - s^{-1} b_1 Y(s) - s^{-2} b_0 Y(s) \\
s^2 Y(s) &= a_2 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_0 X(s) - b_1 s Y(s) - b_0 Y(s)
\end{aligned}
$$