Commande robuste - Approche polynomiale

Thao Dang

SLE, ENSIMAG

Plan

- Introduction - systèmes linéaires, commande robuste
- Analyse de stabilité
  - Un seul paramètre d'incertitude - Critère de valeurs propres
  - Incertitude d'intervalle
  - Incertitude polytopique

Incertitude d'intervalle

Structure indépendante

- Chaque composant q_i apparaît seulement dans un coefficient
- Système de grue à levage $0.6 + 2s + (2.6 + 0.001m_L)s^2 + 2s^3 + s^4$ avec la masse m_L incertaine $\Rightarrow$ incertitude indépendante
- $0.6 + 20s + (2.6l + 21)s^2 + 2ls^3 + ls^4$ avec la longeur l incertaine $\Rightarrow$ incertitude dépendante

Incertitude d'intervalle

- Structure indépendante
- Chaque paramètre d'incertitude appatient à une boîte: $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$

Incertitude d'intervalle - Exemples

Le polynôme $(6+q_0)+(4+q_1)s+(2+q_2)s^2$ avec $|q_i| \leq 1$ a l'incertitude de type d'intervalle. On peut l'éxprimer comme

$$[5,7]+[3,5]s+[1,3]s^2$$

Polynôme $(3+q_0)+(6+2q_1+5q_4)s+(5+q_2+2q_3)s^2+s^3$ avec $|q_i| \leq 0.5$. Notons

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0 &= 3+q_0, \;\; \tilde{q}_0 \in [2.5, 3.5] \\ \tilde{q}_1 &= 6+2q_1+5q_4, \;\; \tilde{q}_1 \in [2.5, 9.5] \\ \tilde{q}_0 &= 5+q_2+2q_3, \;\; \tilde{q}_2 \in [3.5, 6.5] \end{aligned}$$

Ce polynôme est équivalent à

$$[2.5, 3.5]+[2.5, 9.5]s+[3.5, 6.5]s^2+s^3$$

Polynômes de Kharitonov

On définit pour un polynôme d'intervalle $p(s,q) = \sum_{i=0}^{n}[q_i^-, q_i^+]s^i$ 4 polynômes de Kharitonov :

$$p^{--}(s) = F_{e,min}(s) + F_{o,min}(s), \qquad p^{-+}(s) = F_{e,min}(s) + F_{o,max}(s)$$

$$p^{+-}(s) = F_{e,max}(s) + F_{o,min}(s), \qquad p^{++}(s) = F_{e,max}(s) + F_{o,max}(s)$$

avec

$$F_{e,min}(s) = q_0^- + q_2^+ + q_4^- + \dots$$
$$F_{e,max}(s) = q_0^+ + q_2^- + q_4^+ + \dots$$
$$F_{o,min}(s) = q_1^- + q_3^+ + q_5^- + \dots$$
$$F_{o,max}(s) = q_1^+ + q_3^- + q_5^+ + \dots$$

Exemple. Pour $p(s,q) = [1,2]+[3,4]s+[5,6]s^2+[7,8]s^3$, les 4 polynômes de Kharitonov sont

$$p^{--}(s) = 1 + 3s + 6s^2 + 8s^3$$

$$p^{-+}(s)(s) = 1 + 4s + 6s^2 + 7s^3$$
$$p^{+-}(s)(s) = 2 + 3s + 5s^2 + 8s^3$$
$$p^{++}(s)(s) = 2 + 4s + 5s^2 + 7s^3$$

Théorème de Kharitonov

Un polynôme d'intervalle en temps-continu est robustement stable ssi ses 4 **polynômes de Kharitonov sont stables** [Kharitonov, 1978].

Au lieu de vérifier la stabilité d'un nombre infini de polynômes, on vérifie la stabilitéde 4 polynômes (en utilisant le critère classique de Hurwitz par exemple).

Simplifications : pour les polynômes de degré bas

- degré 5 : $p^{--}(s), p^{-+}(s), p^{+-}(s)$
- degré 4 : $p^{+-}(s), p^{++}(s)$ (à condition que $q_0^- > 0$)
- degré 3 : $p^{+-}(s)$ (à condition que $q_0^- > 0$)

Théorème de Kharitonov - Exemple

Système de grue à levage avec $m_L \in [50, 2395]$

$$0.6 + 2s + [2.650, 4.995]s^2 + 2s^3 + s^4$$

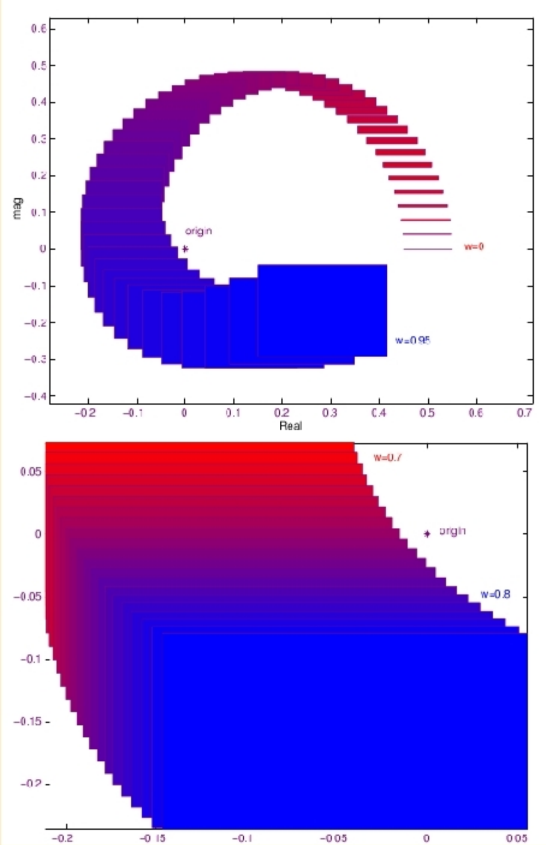
Les deux polynômes de Kharitonov sont le même polynôme stable

$$0.6 + 2s^2 + 2.650s^2 + 2s^3 + s^4.$$

Conclusion : le système est robustement stable pour toutes les valeurs de la masse $m_L \in [50, 2395]$.

Théorème de Kharitonov - Interprétation géométrique

L'ensemble de valeurs du polynôme ne contient pas l'origine 0.



Marge de robustesse

$$p(s,q) = p_0(s) + r \sum_{i=0}^{n-1} [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] s^i$$

avec $r > 0$ et $\varepsilon_i \geq 0$
La valeur maximale r_{max} t.q. $p(s,q)$ est robustement stable est applée **la marge de robustesse**.

On définit 4 polynômes de Kharitonov

$$\begin{array}{rcl}
p_1^{--}(s) & = & -\varepsilon_0 - \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_3 s^3 \cdots \\
p_1^{-+}(s) & = & -\varepsilon_0 + \varepsilon_1 s + \varepsilon_3 s^2 - \varepsilon_3 s^3 \cdots \\
p_1^{+-}(s) & = & \varepsilon_0 - \varepsilon_1 s - \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_3 s^3 \cdots \\
p_1^{++}(s) & = & \varepsilon_0 + \varepsilon_1 s - \varepsilon_2 s^2 - \varepsilon_3 s^3
\end{array}$$

et applique le critère de valeurs propres,

$$\begin{aligned}
r_{\max} = \min\{ & 1/\lambda^+_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1^{--})), \\
& 1/\lambda^+_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1^{-+})), \\
& 1/\lambda^+_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1^{+-})), \\
& 1/\lambda^+_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1^{++}))\}
\end{aligned}$$

Sur-approximation

Un polynômes d'intervalle avec $|q_i| \leq 0.25$

$$p(s,q) \;=\; (0.5 - 3q_1q_2) + (6 + 6q_1 - 8q_2)s + (6 + 3q_1q82 - 4q_2)s^2 + (5 + 0.2q$$

On calcule les bornes des valeurs des coefficients

$$0.3125 \leq 0.5 - 3q_1q_2 \leq 0.6875$$

$$2.5 \leq 6 + 6q_1 - 8q_2 \leq 9.5$$

...

et on sur-approxime $p(s,q)$ par

$$\begin{aligned}\tilde{p}(s,\tilde{q}) \;=\; & [0.3125, 0.6875] + [2.5, 9.5]s + [4.8125, 7.1875]s^2 + \\ & [4.9475, 5.0375]s^3 + s^4\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Kharitonov, $\tilde{p}(s,\tilde{q})$ est robustement stable, alors $p(s,q)$ est aussi robustement stable.

Sur-approximation

Si le polynômes $\tilde{p}(s, \tilde{q})$ n'est pas robustement stable, on ne peut pas conclure si

- $p(s, q)$ est instable, ou bien
- la sur-approximation est trop grossière

Système à retard

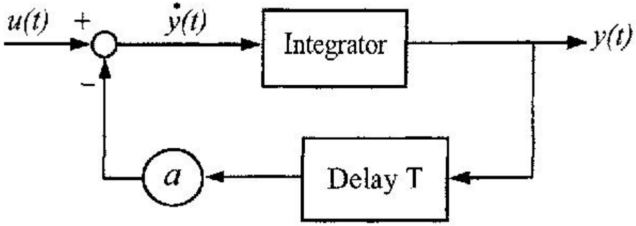


FIGURE 5.2. A feedback system with delay.

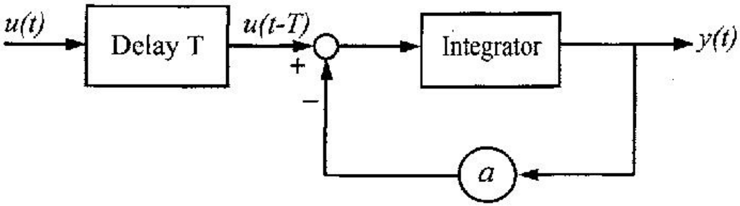


FIGURE 5.3. Input delay.

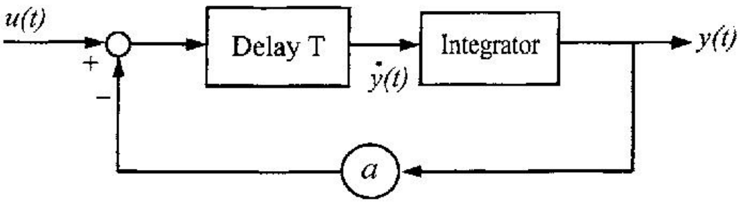


FIGURE 5.4. Delay within the loop.

Système à retard

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \sum_{r=1}^{p} B_r y(t - \tau_r)$$

$$F(s) = det(sI - A - \sum_{r=1}^{p} B_r e^{-\tau_r s})$$

Alors,

$$F(s) = f_0(s) + e^{-sT_1} f_1(s) + \ldots + e^{-sT_r} f_r(s)$$

où $f_k(s)$ sont polynômes. $F(s)$ est appelé quasi-polynôme.

Stabilité du système à retard $\equiv$ toutes les racines de $F(s)$ sont dans le demi-plan gauche.

Approximation de Padé

$$e^{-sL} := \frac{N_m(sL)}{D_m(sL)}$$

avec

$$N_m(sL) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k)!}{k!(m-k)!}(-sL)^k$$

$$D_m(sL) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k)!}{k!(m-k)!}(sL)^k$$

Limitation: Précision. On veut un critère plus sûr.

Quasi-polynômes

Pour un quasi-polynôme

$$p(s,\tau) = a_0(s) + \sum_{k=1}^{m} a_k(s) e^{-\tau_k s}$$

$$a_k(s) = a_{k0} + a_{k1}s + \ldots$$

1. Le polynôme $a_0(s)$ est stable
2. $\sum_{k=0}^{m} a_{k0} \neq 0$
3. Pour tout $w > 0$

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} |a_k(jw)|}{|a_0(jw)|} < 1$$

Quasi-polynômes d'intervalle

Pour un quasi-polynôme d'intervalle

$$p(s, \alpha, \tau) = a_0(s, \alpha_0) + \sum_{k=1}^{m} a_k(s, \alpha_k) e^{-\tau_k s}$$

Pour chaque $a_k(s, \alpha_k)$ on définit 4 polynômes de Kharitonov :

$$\begin{aligned}
K_{k,1}(s) &= \alpha_{k0}^- + \alpha_{k1}^- s + \alpha_{k2}^+ s^2 + \alpha_{k3}^+ s^3 + \ldots \\
K_{k,2}(s) &= \alpha_{k0}^+ + \alpha_{k1}^+ s + \alpha_{k2}^- s^2 + \alpha_{k3}^- s^3 + \ldots \\
K_{k,3}(s) &= \alpha_{k0}^+ + \alpha_{k1}^- s + \alpha_{k2}^+ s^2 + \alpha_{k3}^- s^3 + \ldots \\
K_{k,4}(s) &= \alpha_{k0}^- + \alpha_{k1}^+ s + \alpha_{k2}^+ s^2 + \alpha_{k3}^- s^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Quasi-polynômes d'intervalle

Pour un quasi-polynôme d'intervalle

$$p(s,\alpha,\tau) = a_0(s,\alpha_0) + \sum_{i=1}^{m} a_k(s,\alpha_k)e^{\tau_k s}$$

1. Les polynômes $K_{0,1}(s)$, $K_{0,2}(s)$, $K_{0,3}(s)$, $K_{0,4}(s)$ sont stables
2. $\sum_{k=0}^{m} \alpha_{k0}^{-} > 0$
3. Pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour tout $i_k \in \{1,2,3,4\}$, $k = 0,1,\ldots,m$, pour tout $\omega > 0$

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} |K_{k,i_k}(j\omega)|}{|K_{k,i_0}(j\omega,\lambda)|} \leq 1$$

TD: Application au Robot LEGO

Le délai τ du moteur peut être introduit dans la fonction de transfert:

$$H_\theta(s) = \frac{e^{-\tau s}}{ls}$$

Avec le contrôleur PI

$$C_\theta(s) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta$$

Questions

- Calculer le polynôme $p(s)$ caractéristique de la boucle fermée
- Etudier la stabilité par rapport à au délai τ