Commande robuste - Approche polynomiale

Thao Dang

SLE, ENSIMAG

Plan

- Introduction - systèmes linéaires, commande robuste
- Analyse de stabilité
  - Un seul paramètre d'incertitude - Critère de valeurs propres
  - Intervalle d'incertitude
  - Polytope d'incertitude

Systèmes linéaires

Systèmes **linéaires**

- La théorie de commande de systèmes linéaires est bien développée.
- Plusieurs outils de conception assistée par l'ordinateur.
- Voir un petit rappel.

Systèmes **linéaires incertains**

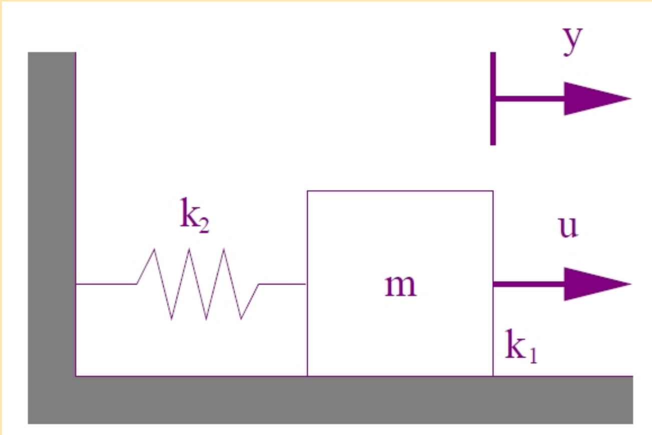
- Approche polynomiale : Basée sur l'algèbre linéaire et l'algèbre de matrices polynomiales

Reference http://www.polyx.cz/frm-main-tutorials.htm

Approche polynomiale

Une fonction de transfert peut être vue comme une fraction polynomiale

Exemple : un système mécanique



y : déplacement; u : force externe; k_1 : coef de friction de viscosité; k_2 : constante de ressort; m : masse

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{ms^2 + k_1 s + k_2}$$

Approche polynomiale

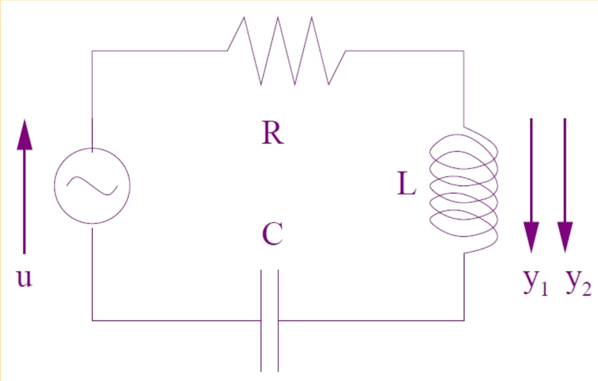
Généralisation aux matrices de polynômes.

$$(D_o + D_1 s + D_2 s^2) y(s) = N_o u(s)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} 121 & 18.9 & 15.9 \\ 0 & 2.7 & 0.145 \\ 11.9 & 3.64 & 15.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.66 & 2.45 & 2.1 \\ 0.23 & 1.04 & 0.223 \\ 0.6 & 0.756 & 0.658 \end{bmatrix} s +$$

$$\begin{bmatrix} 17.6 & 1.28 & 2.89 \\ 1.28 & 0.824 & 0.413 \\ 2.89 & 0.413 & 0.725 \end{bmatrix} s^2$$

Exemple : un circuit RLC

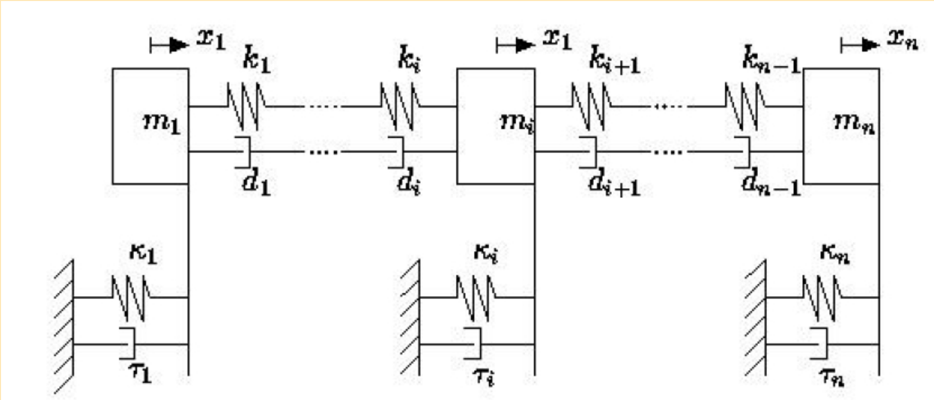


y_1 : tension sur l'inducteur; y_2 : courant passant l'inducteur; u : tension de la source

$$\begin{bmatrix} 1 & -Ls \\ Cs & 1+RCs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Cs \end{bmatrix} u(s)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & -Ls \\ Cs & 1+RCs \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Cs \end{bmatrix}.$$

Exemple : un système de ressorts



$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

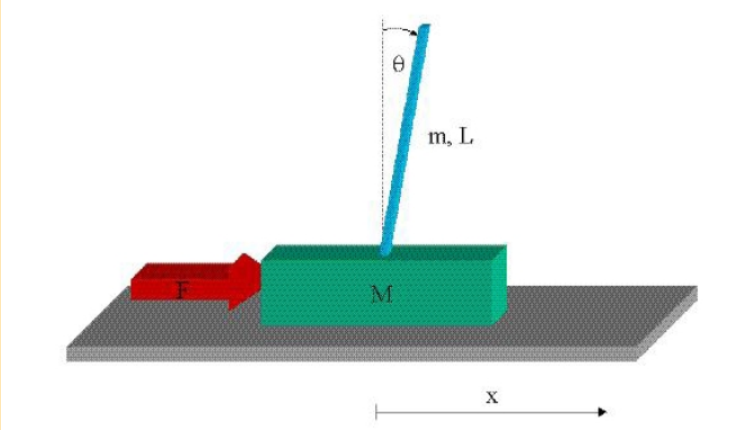
où $n = 250$, $m_i = 1$, $\kappa_i = 5$, $\tau_i = 10$, sauf $\kappa_1 = \kappa_n = 10$ et $\tau_1 = \tau_n = 20$

$$M = I$$

$$C = tridiag(-10, 30, -10)$$

$$K = tridiag(-5, 15, -5)$$

Exemples : un pendule inversé



Linéarisation autour du la position verticale en haut

$$\begin{bmatrix} (M+m)s^2+bs & lms^2 \\ lms^2 & (J+l^2m)s^2+ks-lmg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(s)$$

Avec $J = mL^2/12$, $l = L/2$, $g = 9.8$, $M = 2$, $m = 0.35$, $l = 0.7$, $b = 4$, $k = 1$.

$$D(s) = \begin{bmatrix} 5s+3s^2 & 0.35s^2 \\ 0.35s^2 & -3.4+s+0.16s^2 \end{bmatrix}$$

Plusieurs exemples d'ordre plus grand dans la modélisation aéro-acoustique et en mécanique de fluides.

Incertitude

Incertitude dans la modélisation

- Non-paramétrique
  - dynamique non-modélisée
  - modes avec des fréquences hautes tronquées
  - non-linéarité
  - effets de linéarisation, variations temporelles
- Paramétrique
  - Paramètres physiques qui varient dans certaines bornes

Méthodes pour traiter l'incertitude

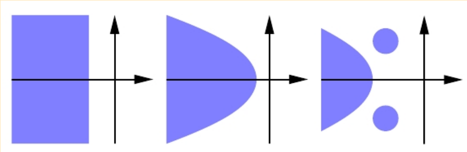
- commande prédictive
- commande adaptive
- **commande robuste : On cherche une lois de commande valide pour toutes les valeurs admissibles de l'incertitude**

Stabilité de polynôme

Un polynôme $p(s)$ est stable si toutes ces racines sont dans une région spécifique du plan complexe

La région de stabilité dépend de la nature du système

- demi-plan à gauche (système en temps continu)
- le disque d'unité (système en temps discret)

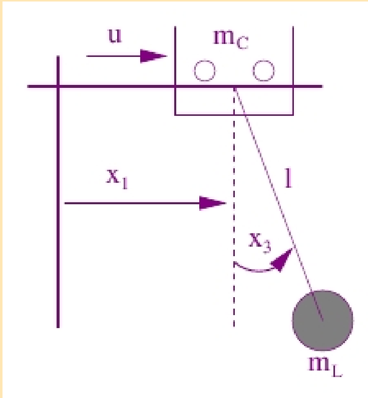


La région de stabilité peut être plus compliquée afin d'assurer

- amortissement (parabole)
- comportement dominant (demi-plan ou disque décalé)
- bande passante (demi-plan ou disque décalé)
- commande par retour à petit gain qui préserve les comportements fréquentiels (zones non-connexes).

Stabilité des polynômes - Exemple

Un modèle linéarisé d'un système de grue à levage



Le polynôme caractéristique de la boucle dermée

$$\frac{600g}{lm_C} + \frac{2000g}{lm_C}s + \frac{10000 + 6000l + gm_C + gm_L}{lm_C}s^2 + \frac{2000}{m_C}s^3 + s^4$$

$g = 10$, $m_C = 1000$, $l = 10$

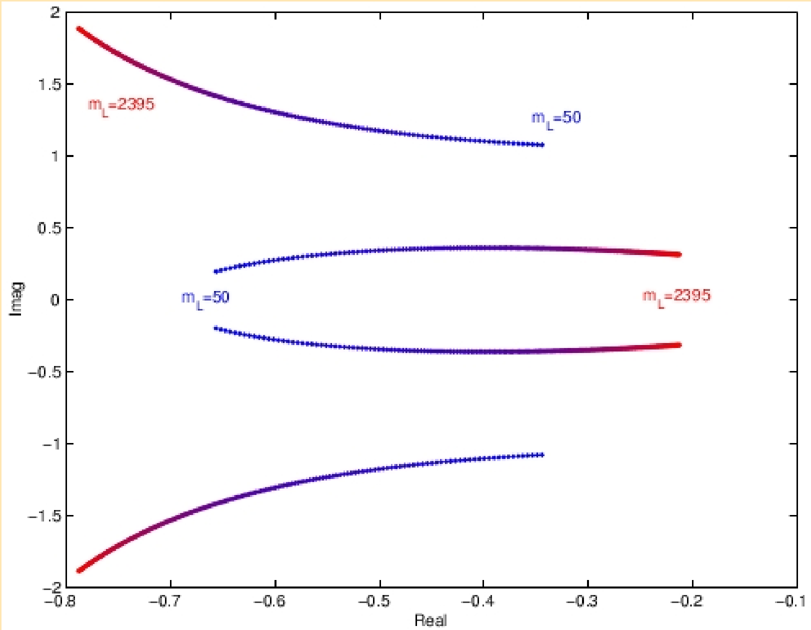
Si la masse m_L n'est pas connue précisément et $m_L \in [50, 2395]$, la question est :

Est-ce que le polynôme est stable pour toutes les valeurs admissibles de m_L ?

Analyse de Stabilité

On visualise des racines (pôles) du polynôme (en divisant l'intervalle de valeurs de m_L en petits intervalles)

$$0.6 + 2s + (2.6 + 0.001m_L)s^2 + 2s^3 + s^4$$

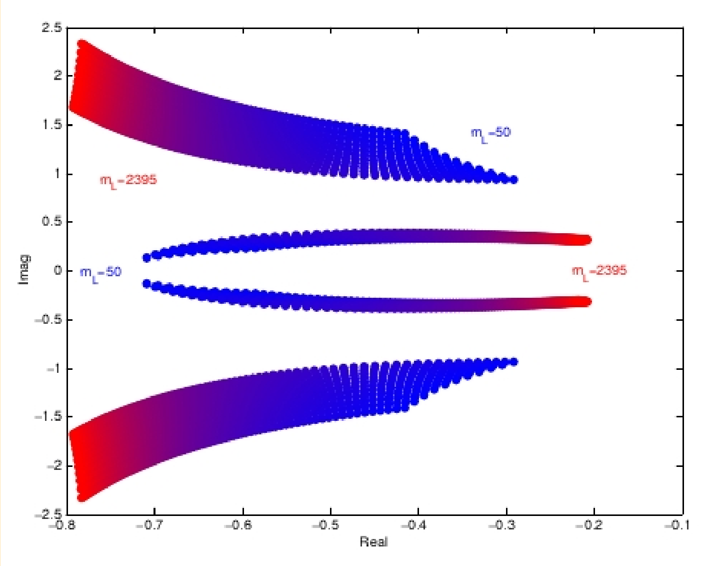


Les racines (pôles) restent dans le demi-plan gauche, le système en boucle fermée est alors **robustement stable**.

Deux paramètres incertains

Si la longeur l est aussi incertaine

$$\frac{6}{l} + \frac{20}{l}s + \frac{0.6l + 20 + 0.01m_L}{l}s^2 + 2s^3 + s^4$$



Les racines restent dans le demi-plan à gauche, le système en boucle fermée est robustement stable.

Pourtant, le temps de calcul devient long et est exponentiel en nombre de paramètres incertains ⇒ on a besoin des outils plus perfomants.

Outils d'analyse de stabilité

On va étudier les cas suivants

- un seul paramètre incertain $q \in [q_{min}, q_{max}]$
- intervalle d'incertitude $q_i \in [q_{imin}, q_{imax}]$
- polytopic uncertainty $\lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_N q_N$
- multilinear uncertainty $q_0 + q_1 q_2 q_3$

On commence avec le cas avec **un seul paramètre incertain** et **le critère de valeurs propres**.

Un seul paramètre incertain

On considère un polynôme :

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

- $p_0(s)$ est un polynôme stable (nominal)
- $p_1(s)$ est un polynôme arbitraire
- q est un paramètre incertain dans l'intervalle $[q_{min}, q_{max}]$

Exemple : un système du premier ordre

$$P(s,q) = \frac{1}{s-q}, \qquad |q| \leq 2$$

La commande par retour $C(s) = 1$

Le polynôme de la boucle fermée :

$$p(s,q) = s + 1 - q$$

est robustement stable ?????

Un seul paramètre incertain

On considère un polynôme :

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

- $p_0(s)$ est un polynôme stable nominal
- $p_1(s)$ est un polynôme arbitraire
- q est un paramètre incertain dans l'intervalle $[q_{min}, q_{max}]$

Exemple : un système du premier ordre

$$P(s,q) = \frac{1}{s-q}, \qquad |q| \leq 2$$

La commande par retour $C(s) = 1$

Le polynôme de la boucle fermée :

$$p(s,q) = s + 1 - q$$

est robustement stable ????? $\Rightarrow$ NON, car la racine quitte le demi-plan gauche quand $q \geq 1$.

Perte de stabilité

Les racines dépendent d'une manière continue des coefficients, donc l'instabilité surgit quand les racines traversent la frontière de stabilité (l'axe imaginaire dans le cas de temps continu).

L'instabilité peut arriver aussi quand le degré du polynôme change

$$p(s,q) = qs^2 - s - 1, \quad q \in [0,1]$$

- $p(s,0) = -(s+1) \Rightarrow$ stable
- $p(s,1) = (s+0.6180)(s-1.6180) \Rightarrow$ instable

On va utiliser l'hypothèse d'invariance de degré.
Le critère est valide pour des régions de stabilité non-bornées

Matrice de Hurwitz

On considère un polynôme :

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_{n-1} s^{n-1} + p_n s^n$$

avec $p_n > 0$, on définit sa matrice de Hurwitz

$$H(p) = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & & 0 & 0 \\ p_n & p_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n-1} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & p_n & & p_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & & p_2 & p_0 \end{bmatrix}$$

Critère de Hurwitz : $p(s)$ est stable ssi tous les mineurs principaux dominants de $H(p)$ sont > 0

Rappel: Mineurs principaux dominants

Pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Considérons les déterminants de n sous-matrices suivantes:

$$d_1 = det(\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix})$$

$$d_2 = det(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix})$$

$$d_n = det(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix})$$

Ces n déterminants sont appelés *les mineurs principaux dominants de* A.

Critère Bialas

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

$p_0(s)$ stable avec des coefs positifs, et $p_1(s)$ tel que $deg_{p_1(s)} < deg_{p_0(s)}$

On cherche l'intervalle de stabilité la plus grande $q \in]q_{min}, q_{max}[$ telque $p(s,q)$ est robustement stable.

Matrice d'Hurwitz

$$\begin{aligned} H(p) &= H(p_0(s) + qp_1(s)) && (1) \\ &= H(p_0(s)) + qH(p_1(s)) && (2) \\ &= H_0 + qH_1 && (3) \end{aligned}$$

Notons que $detH(p) = det[H_0 + qH_1]$.

Avec $detH_0 > 0$, considérons $det[q^{-1} + H_0^{-1}H_1]$ et il n'y a pas de "root crossing" à l'infini, on obtient le **critère Bialas**

Critère Bialas (suite)

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

$p_0(s)$ stable avec des coefs positifs, et $p_1(s)$ tel que $deg_{p_1(s)} < deg_{p_0(s)}$

Notation:

- Pour une matrice A, $\lambda^+_{max}(A)$ est la *valeur propre réelle positive la plus grande* de A, et λ^-_{min} est la *valeur propre réelle negative la plus petite* de A.
- Pour le polynôme $p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$, H_0 est la *matrice de d'Hurwitz de* p_0 et H_0 est la *matrice de d'Hurwitz de* p_1.

Le **critère Bialas** donne les bornes sur la valeur de q:

$$q_{max} = \frac{1}{\lambda^+_{max}(-H_0^{-1}H_1)}$$

$$q_{min} = \frac{1}{\lambda^-_{min}(-H_0^{-1}H_1)}$$

Matrice de Hurwitz

On considère un polynôme :

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s) + q^2p_2(s) + \ldots + q^m p_m(s)$$

avec $p_0(s)$ stable and $deg_{p_0(s)} > deg_{p_i(s)}$ En utilisant des zéros (racine du déterminante) de la matrice d'Hurwitz

$$H(p) = H(p_0) + qH(p_1) + q^2H(p_2) + \ldots + q^m H(p_m)$$

on peut montrer que

$$q_{min} = 1/\lambda^-_{min}(M)$$

$$q_{max} = 1/\lambda^+_{max}(M)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & I & 0 \\ 0 & & 0 & I \\ -H_0^{-1}H_m & \cdots & -H_0^{-1}H_2 & -H_0^{-1}H_1 \end{bmatrix}$$

D'autres régions de stabilité

Le critère de valeurs propres peuvent être utilisé pour le cas de temps discret où la région de stabilité est le disque unitaire

- Pas de changement de degré à l'infini car la région est bornée
- Matrice de Jury

$$detJ(p) = \alpha \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(1 - z_i z_j)$$

- La stabilité est perdue à -1 et $+1$