Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

– construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;

Echantillonnage

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

– construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;

– échantillonner le système à contrôler et construire un contrôleur échantillonné (théorie de la commande échantillonnée).

Dans tous les cas, il faut choisir la période.

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Théorème fondamental : Théorème des accroissements finis :

Choix de la période

Problème d'analyse numérique

Théorème fondamental : Théorème des accroissements finis :

Sous certaines conditions, pour tout x, t, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que

$$x(t+T) = \sum_{0}^{k} \frac{T^i}{i!} x^{(i)}(t) + \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(t+\alpha T)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Application

Pour intégrer numériquement le système d'équations différentielles

$$x' = f(x,u)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car (accroissements finis)

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Application

Pour intégrer numériquement le système d'équations différentielles

$$x' = f(x,u)$$

on peut utiliser la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Question : combien vaut et peut-on borner l'erreur de la méthode ?

$$e(t) = |x(t) - \hat{x}(t)|$$

Erreur de la méthode d'Euler

$$\hat{x}(t+T) = \hat{x}(t) + T.f(\hat{x}(t), u(t))$$

Question : combien vaut et peut-on borner l'erreur de la méthode ?

$$e(t) = |x(t) - \hat{x}(t)|$$

cette question est cruciale car de sa réponse dépend la possibilité d'utiliser des ordinateurs pour piloter des systèmes

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée
   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

– les sorties n'explosent pas

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

Rôle de la stabilité :

- les sorties n'explosent pas
- les erreurs passées s'oublient

Conditions pour la convergence

Dans plusieurs cas, on arrive aux conditions du type suivant :

1. $b = \dfrac{1}{2} \sup_t |x''(t)|$ est bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est partout négative et bornée

   le système est stable et les entrées douces et bornées

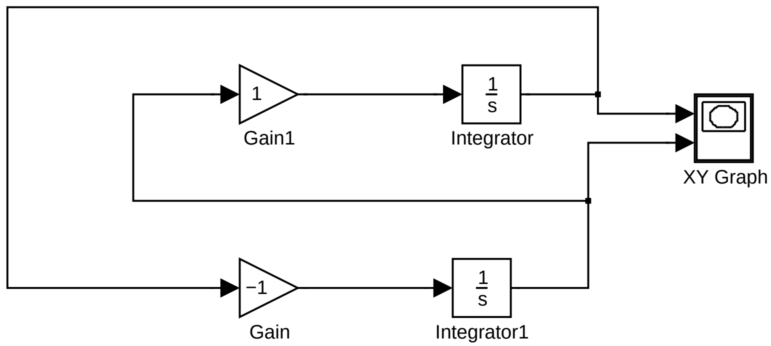
Rôle de la stabilité :

- les sorties n'explosent pas
- les erreurs passées s'oublient

> On ne peut simuler fidèlement en temps réel sur ordinateur que des systèmes stables

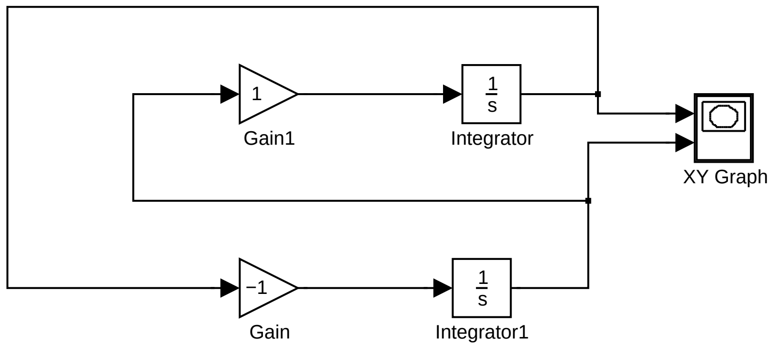
Exemple

Sinus cosinus : instable

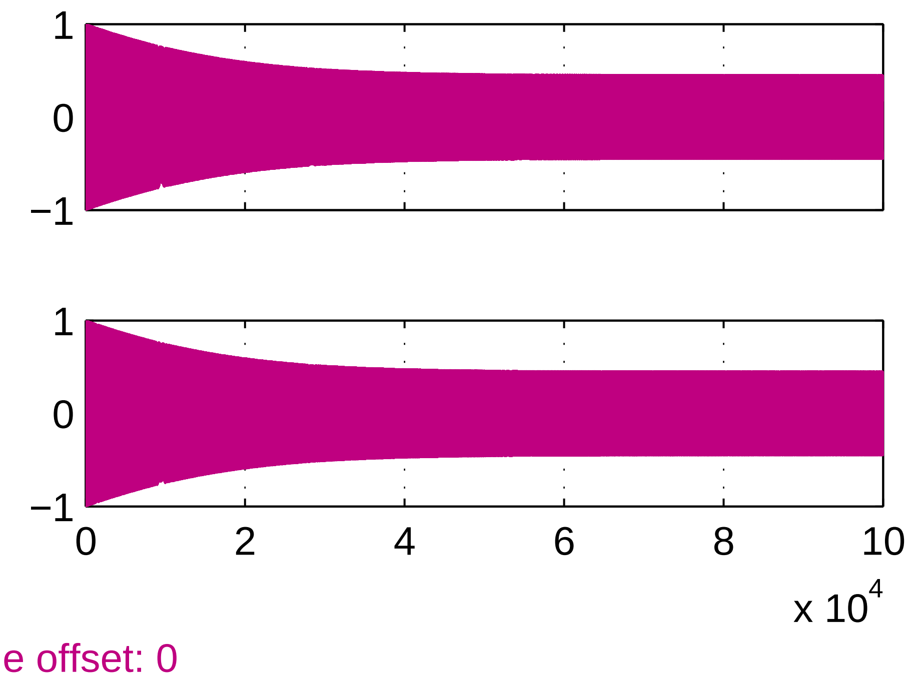


Exemple

Sinus cosinus : instable



Simulation de longue durée



Difference Approximations (1)

- When the continuous-time controller is specified as a transfer function $C(s)$, it is natural to look for methods that will transform the continuous transfer function $C(s)$ to a pulse transfer function $C_d(z)$ so that the corresponding behaviors of the two systems are close to each other.
- z and s are related as $z = exp(sT)$, where T is the sampling period.

Difference Approximations (2)

The difference approximations correspond to the series expansions

– $z = e^{sT} \approx 1 + sT$ (Forward difference or Euler's method)

– $z = e^{sT} \approx \frac{1}{1-sT}$ (Backward difference)

– $z = e^{sT} \approx \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$ (Trapezoidal method, or Tustin's approximation)

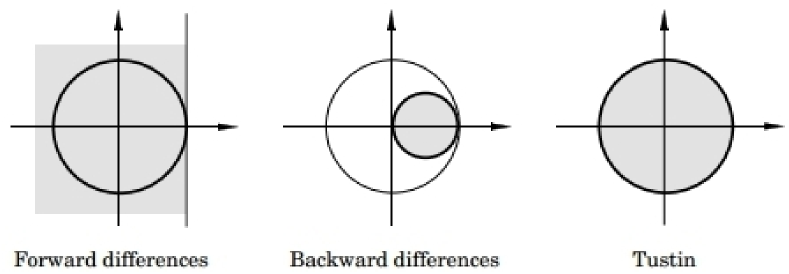
Difference Approximations (2)

To calculate $C_d(z)$ we substitute s in $C(s)$ with the following :

- $s \approx \dfrac{z-1}{T}$ (Forward difference or Euler's method)
- $s \approx \dfrac{z-1}{zT}$ (Backward difference)
- $s \approx \dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$ (Trapezoidal method, or Tustin's approximation)

Stability

the stability region (corresponding to the left half-plane $Re(s) \leq 0$) in the s-plane is mapped on the z-plane.



Grey areas are the results of the mappings

Stability - Remarks

– Forward-difference approximation : it is possible that a stable continuous-time system is mapped into an unstable discrete-time system.
– Backward approximation : a stable continuous-time system will always give a stable discrete-time system.
– Tustin's approximation : has the advantage that the left half s-plane is transformed into the unit disc in the z-plane.