Cours ISC - 2A
TD - Commande robuste

Thao Dang

CNRS-VERIMAG, 2, av. de Vignate, 38610 Gieres, France

Nous illustrons l'étude de la robustesse d'un contrôleur au travers de l'exemple du contrôleur d'orientation de robots LEGO. Le contrôleur de distance peut être analysé de la même manière.

0.1 Contrôleur d'orientation

Les équations différentielles qui décrivent la dynamique du robot sont :

$$\dot{x}_c = (v_g + v_d)cos(\theta)/2 \tag{1}$$
$$\dot{y}_c = (v_g + v_d)sin(\theta)/2 \tag{2}$$
$$\dot{\theta} = (v_g - v_d)/l \tag{3}$$

où x_c et y_c sont les coordonnées de la position courante le robot ; θ est son orientation ; v_g et v_d sont les vitesses des roues à gauche et à droite ; l est la distance entre les deux roues.

Nous contrôlons **l'orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est

$$H_\theta(s) = k(\frac{1}{Ti\ s} + 1) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta \tag{4}$$

où $ki_\theta = k$ est le coefficient de l'action proportionelle et $kp_\theta = \dfrac{k}{Ti}$ est le coefficient de l'action intégrale. La valeur de k est le gain et Ti est la constante du temps du contrôleur.

Comme nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation du robot, nous avons la variable de commande

$u_\theta = (v_g - v_d)$. De l'équation (3) on obtient : $\dot{\theta} = u_\theta/l$, ce qui donne en Laplace $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$ (en supposant que les conditions initiales sont 0). Alors, la fonction de transfert de θ est

$$H_{ro}(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}.$$

Le schéma de commande est comme suit. La sortie u_θ du contrôleur $H_\theta(s)$ est connectée à l' entrée du bloc $H_{ro}(s)$ correspondant à la dynamique de l'orientation du robot. L'entrée du contrôleur $H_\theta(s)$ est la différence entre le retour de la sortie θ_c de $H_{ro}(s)$ et l'orientation désirée θ^*. L'évolution de θ contrôlée par la commande u_θ peut donc être representé par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{H_\theta(s)H_{ro}(s)}{1 + H_\theta(s)H_{ro}(s)} \\ &= \frac{\frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}}{s^2 + \frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}} \end{aligned}$$

Notons $\alpha = 1/l$. Si l'on choisit $ki_\theta = \omega^2/\alpha$ et $kp_\theta = 2\xi\omega/\alpha$ (avec $\omega > 0$, $\xi > 0$), le système en boucle fermée est du deuxième ordre avec le gain statique 1, la pulsation ω et l'amortissement ξ. Notons que les pôles du système en boucle fermée sont

$$p_{1,2} = -\omega(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}).$$

avec les parties réelles $Re(p_{1,2}) < 0$, ce qui garantit la stabilité de θ.

Il nous reste la liberté de choisir des valeurs de ω et de ξ afin d'obtenir des performances désirées (temps de réponse, dépassement, etc).

0.2 Discrétisation de contrôleur

Pour implanter le contrôleur du modèle fourni, il faut le discrétiser. Si on choisit une eériode d'échantillonnage T et une approximation du premier ordre

$$s = \frac{z - 1}{zT}$$

où T est la période d'échantillonnage, on obtient la fonction de transfert en temps discret $H(z)$.

0.3 Système avec des paramètres incertains

Nous allons étudier la robustesse du contrôleur d'orientation vis-à-vis aux paramètres tels que T, ki_θ, kp_θ, l. Afin d'utiliser les critères pour les systèmes en temps continu, nous utilisons la transformation suivante qui ramène le cercle unitaire en z vers le demi-plan gauche en η

$$z = \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

Notons $a = \frac{kp_\theta}{l}$ et $b = \frac{ki_\theta}{l}$, la fonction caractéristique en η est :

$$P(\eta) = (4 + 2aT + bT^2)\eta^2 + (-2aT - 2bT^2)\eta + bT^2$$

(Avec les valeurs numériques du contrôleur d'orientation donné, $a = 2$ et $b = 1$)

En utilisant les fonctions matlab dans le fichier **hurwitz.m** fourni, on calcule la matrice de Hurwitz pour déterminer la stabilité du contôleur pour des différentes valeurs de la période d'échantillonnage T.

0.4 Système à retard

Supposons que le système a un délai

$$H_{ro}(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}e^{-Ds}$$

où D est la durée de retard.

Nous allons étudier la robustesse de ce contrôleur en utilisant l'extension du théorème de Kharitanov.

- Calculer la fonction caractéristique de la boucle fermée $P(s)$. On va ensuite étudier la fonction $F(s) = e^{Ds}P(s)$.
- We write
$$F(jw) = F_r(w) + jF_i(w)$$
où F_r est la partie réelle et F_i est la partie imaginaire.
- On va verifier les conditions suivantes :
  1. F_r et F_i ont des racines réelles simples et elles entrelacent.
  2. $F_i'(w_o)F_r(w_o) - F_i(w_o)F_r'(w_o) > 0$ pour une valeur $w_o \in (-\infty, \infty)$ (où F_r' et F_i' sont les dérivés par rapport à w.
- Afin de vérifier si F_r et F_i ont seulement des racines réelles, on peut utiliser le théorème suivant.

  Theorem 1. *Soit M le plus grand degré de s dans F et N le plus grand degré de e^s. Soit ω une constante telle que $F_r(\omega) \neq 0$ et $F_i(\omega) \neq 0$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que les equations $F_r(\omega)$ et $F_i(\omega)$ aient seulement des racines réelles est que $F - r$ et F_i ont exactement $4kN + M$ racines réelles dans chaque intervalle $[-2k\pi + \omega, 2k\pi + \omega$, $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2 \ldots$ pour une valeur de k_o suffisamment grande.*