

# TD - Commande robuste

Thao Dang

17 octobre 2011

Nous illustrons l'étude de la robustesse d'un contrôleur au travers de l'exemple du contrôleur d'orientation de robots LEGO. Le contrôleur de distance peut être analysé de la même manière.

Les équations différentielles qui décrivent la dynamique du robot sont :

$$\dot{x} = (v_g + v_d)\cos(\theta)/2 \quad (1)$$

$$\dot{y} = (v_g + v_d)\sin(\theta)/2 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = (v_d - v_g)/l \quad (3)$$

où  $x_c$  et  $y_c$  sont les coordonnées de la position courante le robot ;  $\theta$  est son orientation ;  $v_g$  et  $v_d$  sont les vitesses des roues à gauche et à droite ;  $l$  est la distance entre les deux roues.

Nous contrôlons l'**orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est

$$H_\theta(s) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta \quad (4)$$

où  $ki_\theta$  est le coefficient de l'action proportionnelle et  $kp_\theta$  est le coefficient de l'action intégrale.

Comme nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation du robot, nous avons la variable de commande  $u_\theta = (v_d - v_g)$ . De l'équation (3) on obtient :

$$\dot{\theta} = u_\theta/l$$

ce qui donne en Laplace  $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$  (en supposant que les conditions initiales sont 0). Alors, la fonction de transfert de  $\theta$  est

$$H_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}.$$

Le schéma de commande est comme suit. La sortie  $u_\theta$  du contrôleur  $H_\theta(s)$  est connectée à l'entrée du bloc  $H_\theta(s)$  correspondant à la dynamique de l'orientation du robot. L'entrée du contrôleur  $C_\theta(s)$  est la différence entre le retour de la sortie  $\theta$  de  $H_\theta(s)$  et l'orientation désirée  $\theta^*$ . L'évolution de  $\theta$  contrôlée par la commande  $u_\theta$  peut donc être représenté par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{C_\theta(s)H_\theta(s)}{1 + C_\theta(s)H_\theta(s)} \\ &= \frac{\frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}}{s^2 + \frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}} \end{aligned}$$

### 0.0.1 Discrétisation de contrôleur

Pour implanter le contrôleur du modèle fourni, il faut le discrétiser. Si on choisit une période d'échantillonnage  $T$  et une approximation du premier ordre

$$s = \frac{z - 1}{zT}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage, on obtient la fonction de transfert en temps discret  $H(z)$ .

### 0.0.2 Système avec des paramètres incertains

Nous allons étudier la robustesse du contrôleur d'orientation vis-à-vis aux paramètres tels que  $T$ ,  $ki_\theta$ ,  $kp_\theta$ ,  $l$ . Afin d'utiliser les critères pour les systèmes en temps continu, nous utilisons la transformation suivante qui ramène le cercle unitaire en  $z$  vers le demi-plan gauche en  $\eta$

$$z = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}$$

Notons  $a = \frac{kp_\theta}{l}$  et  $b = \frac{ki_\theta}{l}$ , la fonction caractéristique en  $\eta$  est :

$$p(\eta) = (4 + 2aT + bT^2)\eta^2 + (-2aT - 2bT^2)\eta + bT^2$$

Nous pouvons maintenant traiter la variable  $\eta$  comme la variable  $s$  dans des fonctions de transfert en Laplace.

**Question 1** : En utilisant les fonctions matlab dans le fichier **hurwitz.m** fourni, on calcule la matrice de Hurwitz pour déterminer la stabilité du contrôleur pour des différentes valeurs de la période d'échantillonnage  $T$  et des coefficients du PI.

Supposons le contrôleur satisfait la condition suivante  $4 + 2aT + bT^2 = c^2$  où  $c$  est constant.

$$p(\eta) = [c^2\eta^2 + 2\eta c + bT^2] + (-2aT - 2bT^2 - 2c)\eta$$

On peut exprimer  $p$  comme suits.

$$p(\eta) = p_0(\eta) + qp_1(\eta)$$

où

$$p_0(\eta) = c^2\eta^2 + 2\eta c + bT^2$$

et

$$p_1(\eta) = \eta$$

**Question 2** : En considérant  $q = (-2aT - 2bT^2 - 2c)$  comme paramètre, utiliser le **critère Bialas** pour trouver la condition de stabilité robuste.