Cours ISC - 2A

TD - Modélisation et pilotage du robot mobile

Thao Dang

CNRS-VERIMAG, 2, av. de Vignate, 38610 Gieres, France

Les équations différentielles qui décrivent la dynamique du robot sont :

$$\dot{x}_c = (v_g + v_d)\cos(\theta)/2 \quad (1)$$

$$\dot{y}_c = (v_g + v_d)\sin(\theta)/2 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = (v_g - v_d)/l \quad (3)$$

où x_c et y_c sont les coordonnées de la position courante le robot ; θ est son orientation ; v_g et v_d sont les vitesses des roues à gauche et à droite ; l est la distance entre les deux roues.

Nous contrôlons l'**orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est

$$H_\theta(s) = k\left(\frac{1}{Ti s} + 1\right) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta \quad (4)$$

où $ki_\theta = k$ est le coefficient de l'action proportionnelle et $kp_\theta = \frac{k}{Ti}$ est le coefficient de l'action intégrale. La valeur de k est le gain et Ti est la constante du temps du contrôleur.

Comme nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation du robot, nous avons la variable de commande $u_\theta = (v_g - v_d)$. De l'équation (3) on obtient : $\dot{\theta} = u_\theta/l$, ce qui donne en Laplace $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$ (en supposant que les conditions initiales sont 0). Alors, la fonction de transfert de θ est

$$H_{ro}(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}$$

Le schéma de commande est comme suit. La sortie u_θ du contrôleur $H_\theta(s)$ est connectée à l'entrée du bloc $H_{ro}(s)$ correspondant à la dynamique de l'orientation du robot. L'entrée du contrôleur $H_\theta(s)$ est la différence entre le retour de la sortie θ_c de $H_{ro}(s)$ et l'orientation désirée θ^* . L'évolution de θ contrôlée par la commande u_θ peut donc être représenté par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{H_\theta(s)H_{ro}(s)}{1 + H_\theta(s)H_{ro}(s)} \\ &= \frac{\frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}}{s^2 + \frac{kp_\theta}{l}s + \frac{ki_\theta}{l}} \end{aligned}$$

Notons $\alpha = 1/l$. Si l'on choisit $ki_\theta = \omega^2/\alpha$ et $kp_\theta = 2\xi\omega/\alpha$ (avec $\omega > 0$, $\xi > 0$), le système en boucle fermée est du deuxième ordre avec le gain statique 1, la pulsation ω et l'amortissement ξ . Notons que les pôles du système en boucle fermée sont

$$p_{1,2} = -\omega(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}).$$

avec les parties réelles $Re(p_{1,2}) < 0$, ce qui garantit la stabilité de θ .

Il nous reste la liberté de choisir des valeurs de ω et de ξ afin d'obtenir des performances désirées (temps de réponse, dépassement, etc).

Pour que le robot s'arrête au point cible (x_{final}, y_{final}) , il faut ajouter un **contrôleur de distance**. Nous supposons que le robot est déjà alignée à l'orientation désirée qui mène vers le point cible (x_{final}, y_{final}) et que dès maintenant l'orientation ne change plus, c-a-d $\theta = \theta^*$. Puis, on considère le mouvement du robot sur une ligne droite de la position courante (x_c, y_c) vers le point cible. On étudie la distance du robot vers le point cible sur cette ligne $d = (x_{final} - x_c)\cos(\theta)$. Le but maintenant est de ramener la variable d vers 0. Notons que quand θ reste constant, la première équation différentielle donne

$$\dot{\delta} = -(v_g + v_d)/2.$$

De la même manière de contrôler l'orientation, nous pouvons trouver un contrôleur pour stabiliser δ à 0 avec la commande $u_\delta = (v_g + v_d)$.

Combinaison de deux contrôleurs. Notons que la sortie du contrôleur d'orientation est $(v_g - v_d)$ et celle du contrôleur de distance est $(v_g + v_d)$. A partir de ces sorties on peut calculer v_g et v_d comme suit :

$$v_g = (u_\delta + u_\theta)/2, \quad (5)$$

$$v_d = (u_\delta - u_\theta)/2. \quad (6)$$

Les valeurs de v_g et v_d doivent satisfaire les limites de vitesse du robot LEGO.