TD1 et TD2 - Analyse de la robustesse de contrôleurs (systèmes avec paramètres incertains)

Thao Dang

Nous illustrons l'étude de la robustesse de contrôleurs au travers de l'exemple du contrôleur d'orientation de robots LEGO.

Contrôleur d'orientation

Les équations différentielles qui décrivent la dynamique du robot sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (v_g + v_d) cos(\theta)/2 && (1) \\ \dot{y} &= (v_g + v_d) sin(\theta)/2 && (2) \\ \dot{\theta} &= (v_d - v_g)/l && (3) \end{aligned}$$

où x et y sont les coordonnées de la position courante le robot ; θ est son orientation ; v_g et v_d sont les vitesses des roues à gauche et à droite ; l est la distance entre les deux roues.

Nous contrôlons **l'orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est

$$H_\theta(s) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta \qquad (4)$$

où ki_θ est le coefficient de l'action proportionelle et kp_θ est le coefficient de l'action intégrale.

Comme nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation θ du robot, nous avons la variable de commande $u_\theta = (v_d - v_g)$. De l'équation (3) on obtient :

$$\dot{\theta} = u_\theta / l$$

ce qui donne en Laplace $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$ (en supposant que les conditions initiales sont 0). Alors, la fonction de transfert de θ est

$$H_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}.$$

Le schéma de commande est comme suit. La sortie u_θ du contrôleur $H_\theta(s)$ est connectée à l' entrée du bloc $H_\theta(s)$ correspondant à la dynamique de l'orientation du robot. L'entrée du contrôleur $C_\theta(s)$ est la différence entre le retour de la sortie θ de $H_\theta(s)$ et l'orientation désirée θ^*. L'évolution de θ contrôlée par la commande u_θ peut donc être representé par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{C_\theta(s) H_\theta(s)}{1 + C_\theta(s) H_\theta(s)} \\ &= \frac{\frac{kp_\theta}{l} s + \frac{ki_\theta}{l}}{s^2 + \frac{kp_\theta}{l} s + \frac{ki_\theta}{l}} \end{aligned}$$

Discrétisation du contrôleur

Pour implanter le contrôleur en temps-continu ci-dessus, il faut le discrétiser. Si on choisit une eériode d'échantillonnage T et une approximation du premier ordre

$$s = \frac{z-1}{zT}$$

où T est la période d'échantillonnage, on obtient la fonction de transfert en temps discret $H(z)$.

Système avec des paramètres incertains

Nous allons étudier la robustesse du contrôleur d'orientation vis-à-vis aux paramètres tels que T, ki_θ, kp_θ, l. Ces paramètres peuvent être considérés comme incertains par exemple quand on doit implanter le contrôleur en *virgule fixe* (tandis ces paramètres ont été en *flottants*).

Afin d'utiliser les critères pour les systèmes en temps continu, nous utilisons la transformation suivante qui ramène le cercle unitaire en z vers le demi-plan gauche en η

$$z = \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

La fonction caractéristique en η est :

$$p(\eta) = (4 + 2\frac{kp_\theta}{l}T + \frac{ki_\theta}{l}T^2)\eta^2 + (-2\frac{kp_\theta}{l}T - 2\frac{ki_\theta}{l}T^2)\eta + \frac{ki_\theta}{l}T^2$$

Nous pouvons maintenant traiter la variable η comme la variable s dans les fonctions de transfert en Laplace.

1 Question 1 - Critère de Hurwitz

En utilisant les fonctions matlab dans le fichier **hurwitz.m** donné, calculer la matrice de Hurwitz pour déterminer la stabilité du contrôleur pour des différentes valeurs de la période d'échantillonnage T et des coefficients kp_θ et ki_θ du PI. Interpréter les résultats.

2 Question 2 - Critère Bialas

On note les coefficients du polynôme p comme suit :

$$(4 + 2\frac{kp_\theta}{l}T + \frac{ki_\theta}{l}T^2) = A$$
$$(-2\frac{kp_\theta}{l}T - 2\frac{ki_\theta}{l}T^2) = B$$
$$\frac{ki_\theta}{l}T^2 = C$$

Pour étudier la stabilité polynôme p, il suffit d'étudier le polynôme suivant :

$$\pi(\eta) = \eta^2 + \frac{B}{A}\eta + \frac{C}{A}$$

Afin d'utiliser le **critère Bialas** il faut décomposer le polynôme π en deux polynômes sous forme :

$$\pi(\eta) = \pi_0(\eta) + q\pi_1(\eta)$$

Pour ceci, on écrit le polynôme π comme suit :

$$\pi(\eta) = (\eta + \sqrt{C/A})^2 + (-2\sqrt{C/A} + B/A)\eta.$$

D'où

$$\pi_0(\eta) = (\eta + \sqrt{C/A})^2,$$
$$\pi_1(\eta) = \eta$$

et

$$q = (-2\sqrt{C/A} + B/A)$$

Notons que l'on peut utiliser le **critère Bialas** puisque $A > 0$ et $C > 0$, le polynôme π_0 est donc toujours stable.

Nous allons fixer la valeur de C/A et considérer $q = (-2\sqrt{C/A} + B/A)$ comme paramètre incertain.

Question : Utiliser le **critère Bialas** pour trouver la condition de stabilité robuste.