TD 7 : Conditions d'optimalité et relaxation

lionel.rieg@ensiie.fr

Exercice 1

On considère le problème suivant sur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: minimiser $x_1^2 + x_2^2$ sous la contrainte $2x_1 + x_2 \leq -4$.

1. Exprimer le problème de façon graphique.
2. Donner les conditions de Kuhn-Tucker et les résoudre.
3. Sont-elles suffisantes pour l'optimalité ?
4. En déduire la solution du problème.
5. Écrire la fonction duale.
6. Résoudre le problème dual.
7. Y a-t-il un saut de dualité entre les problèmes primal et dual ?

Exercice 2

Un randonneur prépare avec soin le contenu de son sac-à-dos. Le poids total de nourriture emportée ne pourra pas excéder 4 kg. Il dispose de trois aliments de valeurs nutritives et de poids différents.

aliment	poids (kg)	valeur nutritive
1	2	3
2	3	2
3	4	1

Le randonneur cherche quels aliments emporter de façon à maximiser la valeur nutritive totale, sans toutefois dépasser le poids total de 4 kg.

1. Montrer que le problème du randonneur peut se formuler comme le problème suivant en variables (0, 1) :

$$\min_x f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad \text{s. c.} \qquad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \tag{P}$$

On considère le problème suivant, dual de (P), où $X = \{0, 1\}^3$:

$$\max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = \inf_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \tag{D}$$

2. Donner la position du minimum (sans contrainte) d'une fonction linéaire $g(x) = \sum_i a_i x_i$ en variables $(0, 1)$ en fonction des a_i.
3. Résoudre (D) par la méthode des plans sécants en partant de $X^{(0)} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$. On résoudra le problème maître graphiquement en représentant dans le plan (λ, z) les différents « plans sécants » induits par les contraintes du problème maître.
4. Soit λ^* la solution de (D). Le dernier sous-problème admet deux solutions. Montrer que, pour ces deux solutions x^*, (x^*, λ^*) n'est pas un point selle.