TD 6 : Qualification de Arrow-Hurvicz-Uzawa

lionel.rieg@ensiie.fr

Exercice 1

On considère le problème suivant :

$$\text{minimiser } f(x) \text{ s.c. (sous contraintes) pour tout } i \leqslant n, g_i(x) \leqslant 0 \tag{P}$$

On note $S = \{x \mid \forall i \leqslant n, g_i(x) \leqslant 0\}$ l'ensemble des solutions réalisables.
Soit x^* réalisable. On définit $I(x^*) = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$ les contraintes saturées par x^*.
On suppose que :

- pour $i \notin I(x^*)$, g_i est continue en x^*,
- pour $i \in I(x^*)$, g_i est concave et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

On note $F(x^*) = \{y \mid \forall i \in I(x^*), \nabla g_i(x^*).y \leqslant 0\}$.
On cherche à montrer que x^* est qualifié.

1. Soit $y \in F(x^*)$. On pose $x_k = x^* + \frac{1}{k}y$. Montrer que x_k est réalisable pour k suffisamment grand.
2. En déduire que x^* est qualifié, *i.e.* que $F(x^*) = T(S, x^*)$, où $T(S, x^*)$ est le cône tangent à S en x^*.
3. Application :
   On prend $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leqslant 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leqslant 0$, $f(x) = x_1 - x_2$ et $x^* = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que x^* ne vérifie pas la qualification de Cottle.
   (b) Montrer que x^* est qualifié et expliciter le cône tangent en x^*.
   (c) En déduire que x^* n'est pas minimum local de (P).

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$\min f(x) \text{ s.c. } x \in S = \{x \mid Ax \leqslant b\}$$

1. Montrer que tout $x \in S$ est qualifié.
2. Donner $T(S, x)$ pour $x \in S$ ainsi que la condition nécessaire d'optimalité.
3. Montrer que si f est convexe, alors la condition est suffisante pour l'optimalité globale.
4. Application :
   Soit le problème $\min 2x_1 + x_2$ s.c. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$.
   Montrer que $x^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas minimum et que $x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est minimum global.

Exercice 3

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $x \in C$.

1. Montrer que $C \setminus \{x\} \subseteq T(C, x)$.
2. On appelle cône(A) le plus petit cône contenant A. Montrer que $T(C, x) = \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})}$.
3. En déduire que $T(C, x)$ est convexe.
4. Soit $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Donner $T(C, 0)$ et vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T(C, 0)$.