TD 4 : Méthodes itératives

lionel.rieg@ensiie.fr

1 Méthode de Cauchy

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, on part de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et on va utiliser la méthode de Cauchy, ou méthode de la plus forte pente.

1. Calculer le gradient de f en $x^{(0)}$. On pose alors $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$.
2. Déterminer $x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda d^{(0)}$ avec λ qui minimise $f(x^{(1)})$. Comparer les valeurs de f en $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$.
3. Recommencer les deux questions précédentes pour calculer $x^{(2)}$. Est-ce un point critique ?

2 Méthode du gradient conjugué

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + 2x_2$. On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, on part de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on va utiliser la méthode du gradient conjugué.

1. Écrire f sous la forme $f(x) = \frac{1}{2}x^tQx + b^tx$.
2. Construire $x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda d^{(0)}$ avec $d^{(0)}$ la direction opposé au gradient au point $x^{(0)}$ et λ qui minimise $f(x^{(1)})$.
3. On cherche maintenant à déterminer la direction suivante $d^{(1)}$ de descente.
   (a) Donner la relation que doit satisfaire $d^{(1)}$ pour être une direction de descente de f au point $x^{(1)}$.
   (b) Donner la relation que doit vérifier $d^{(1)}$ pour être conjuguée a $d^{(0)}$ par rapport à Q.
   (c) Puisque $d^{(1)}$ n'est qu'une direction, sa norme n'importe pas et on peut donc fixer l'une de ses coordonnées (mais attention au signe !). Donner $d^{(1)}$ tel que sa second composante soit égale à 2 en valeur absolue.
4. Construire de même $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda d^{(1)}$ avec λ qui minimise $f(x^{(2)})$.
5. Est-il nécessaire de faire une étape supplémentaire ?

3 Méthode des directions conjuguées

Exercice 3

Soit Q une matrice symétrique, définie positive, soient $p^{(0)}, p^{(1)}, \ldots, p^{(n-1)}$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer par récurrence que $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}$ définis par

$$\begin{cases} d^{(0)} = p^{(0)} \\ d^{(k+1)} = p^{(k+1)} - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{p^{(k+1)}.Qd^{(i)}}{d^{(i)}.Qd^{(i)}} d^{(i)} \end{cases}$$

sont des directions conjuguées deux à deux par rapport à Q, *i.e.* $d^{(i)} \neq 0$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et $d^{(j)}.Qd^{(i)} = 0$ pour tout $0 \leq i < j \leq n-1$. Pour $d^{(i)} \neq 0$, on pourra démontrer par récurrence que $d^{(i)}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $p^{(0)}, \dots, p^{(i)}$.

2. Soit $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Déterminer Q symétrique telle que $f(x) = \frac{1}{2}x.Qx$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   (b) Soit $p^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $p^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $d^{(0)}$ et $d^{(1)}$.

   (c) Pour $k \geq 0$, soit $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$ où $\alpha^{(k)}$ minimise $\alpha \mapsto f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$, α étant de signe quelconque. calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ en partant de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (d) Refaire la question précédente en utilisant les directions $p^{(k)}$ plutôt que $d^{(k)}$.