TD 2 : Convexité

lionel.rieg@ensiie.fr

1 Minimisation d'une fonction sans contrainte

Exercice 1

Soit une fonction quadratique $q(x) = \frac{1}{2}x.Qx + b.x + c$ avec Q symétrique de taille $n \times n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour que q admette un minimum local est $Q \geqslant 0$ et $b \in \operatorname{Im} Q$, *i.e.* il existe b' tel que $b = Q\,b'$.
2. Montrer que sous ces conditions, le minimum est global.
3. Application : Soit $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2$ définie sur $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer b et Q.
   (b) q admet-elle des minima locaux ou globaux ?

Exercice 2

Chercher les minima de la fonction f suivante, définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = e^{x-y} + e^{y-x} + z^2$$

2 Convexité

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$$

1. Montrer que f est strictement convexe par deux méthodes différentes.
2. Déterminer le minimum de f.

Exercice 4

Soient f_1 une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f_2 une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et g une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g \circ f_2$ est convexe.
2. Sous quelles conditions $f_1 \circ g$ est-elle convexe ?

Exercice 5

Soit S un convexe de $\mathbb{R}^n$, g une fonction concave sur S et h une fonction convexe décroissante sur $g(S)$.

1. Montrer que $h \circ g$ est convexe. Que faut-il supposer pour que $h \circ g$ soit strictement convexe ?
2. Application : Si g est de plus strictement positive sur S, montrer que $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ est convexe.

Exercice 6

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est *quasi-convexe* lorsque

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \max(f(x), f(y))$$

Si de plus l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < \lambda < 1$, on dit que f est *fortement quasi-convexe.*

1. Soit x^* un minimum local strict de f quasi-convexe sur C, montrer que x^* est un minimum global strict de f sur C.
2. Soit x^* un minimum local de f fortement quasi-convexe sur C, montrer que x^* est un minimum global strict de f sur C.

Exercice 7

On considère le programme géomérique suivant :

$$\min_{x>0, y>0} g \quad \text{avec} \quad g(x,y) = x + 2\frac{y}{x^2} + \frac{2}{y} \tag{PG}$$

1. Calculer le hessien de g au point de coordonnées $(x, y) = (1, 2)$. En déduire que g n'est pas convexe.
2. Écrire le dual géométrique (DPG) de (PG).
3. Résoudre (DPG).
4. En déduire la solution de (PG).
5. Vérifier que la solution trouvée est bien un point critique de g.