TD 11 : Méthodes de pénalité et de barrière

lionel.rieg@ensiie.fr

1 Méthode de pénalité

Exercice 1

On considère le problème (P) suivant :

$$\min f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 \qquad \text{s.c.} \qquad x_1 + x_2 \geq 1 \tag{P}$$

1. Résoudre (P) par la méthode de pénalité de Beltrami en prenant $\mu_k = k$.
2. Retrouver le multiplicateur de Lagrange des conditions de Kuhn-Tucker.

2 Méthode de barrière

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$\min f(x) = x_1 + x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0$$

Résoudre ce problème par la méthode barrière en prenant $c_k = k$ et pour barrière

1. $B(x) = -\frac{1}{g(x)}$
2. $B(x) = -log(-g(x))$

Donner à chaque fois le multiplicateur de lagrange λ_k.

Solutions

▶ Exercice 1

1. La pénalité de Beltrami est donnée par $P(k) = \sum_i (g_i^+(x))^2$ où $g^+(x) = \max(0, g(x))$. Ici, cela donne $P(x) = (g^+(x))^2 = (\max(0, -x_1 - x_2 + 1))^2$ et la suite de problèmes avec pénalités (donc sans contraintes) est donc $(P_k) \quad \min f(x) + \mu_k P(x)$, c'est-à-dire $\min f_k(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + k(g^+(x))^2$ puisqu'on prend $\mu_k = k$.
   Le gradient de (P_k) est :
$$\nabla f(x) + 2kg^+(x)\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + 2kg^+(x) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   On considère deux cas, suivant le signe de $g(x)$:
   Cas $g(x) < 0$: On a donc $g^+(x) = 0$ et $\nabla f_k = \nabla f$. La condition $\nabla f_k(x) = 0$ donne $x_1 = x_2 = 0$. En revanche, on a $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse $g(x) < 0$.
   Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.
   Cas $g(x) \geq 0$: On a donc $g^+(x) = g(x)$ et $\nabla f_k(x) = \nabla f(x) + 2kg(x)\nabla g(x)$. La condition $\nabla f_k(x) = 0$ donne
$$\begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + 2k(-x_1 - x_2 + 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 6x_1 + 2k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ 6x_1 = 4x_2 \iff x_2 = \frac{3}{2}x_1 \end{cases}$$
   On obtient finalement $x_1 = \frac{2k}{5k+6}$ et $x_2 = \frac{3k}{5k+6}$. La solution x_k de (P_k) est donc $\begin{pmatrix} \frac{2k}{5k+6} \\ \frac{3k}{5k+6} \end{pmatrix}$. La limite de cette suite est $x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ qui est donc solution du problème (P) initial.
2. Si (x_k) est une suite qui tend vers une solution de (P), les multiplicateurs de Lagrange sont donnés par $2\mu_k g_i^+(x_k)$ qui tend vers λ_i.
   Dans notre cas, cela donne :
$$2kg^+(x_k) = 2kg(x_k) = 2k\left(-\frac{2k}{5k+6} - \frac{3k}{5k+6} + 1\right) = 2k\left(\frac{-2k - 3k + 5k + 6}{5k+6}\right) = \frac{12k}{5k+6} \to \frac{12}{5}$$

▶ Exercice 2

La méthode de barrière considère la suite de problème $\min f_k(x) = f(x) + \frac{1}{c_k}B(x)$. Puique f est continue, si la suite des solutions converge, alors elle converge vers une solution du problème initial.

1. On considère la suite de problèmes suivante :
$$\min f_k(x) = x_1 + x_2 - \frac{1}{k}\frac{1}{x_1^2 - x_2 - 2} \qquad \text{s.c.} \qquad x_1^2 - x_2 - 2 < 0$$
   Calculons les points critiques de f_k :
$$\nabla f_k(x) = 0 \iff \begin{cases} 1 + \frac{1}{k}\frac{2x_1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2} = 0 \\ 1 - \frac{1}{k}\frac{1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 1 \cdot 2x_1 = 0 \\ 1 = \frac{1}{k}\frac{1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ k(x_1^2 - x_2 - 2)^2 = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ (-x_2 - \frac{7}{4})^2 = \frac{1}{k} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ (x_2 + \frac{7}{4})^2 = \frac{1}{k} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{7}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

Pour vérifier si ces solutions sont réalisables, on reporte dans g : $g(x_k) = \frac{1}{4} - (-\frac{7}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2 = \mp\frac{1}{\sqrt{k}}$. On veut que $g(x_k) = \mp\frac{1}{\sqrt{k}} < 0$ donc on prend $x_k = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/4 + 1/\sqrt{k} \end{pmatrix}$.

Cette suite converge vers $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/4 \end{pmatrix}$ qui est donc une solution du problème initial. Le multiplicateur de Lagrange est approximé par le coefficient devant $\nabla g(x)$ dans le système ci-avant :

$$\frac{1}{c_k g(x)^2} = \frac{1}{k(\frac{1}{4} - (-\frac{7}{4} + \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2)^2} = \frac{1}{k(\frac{1}{\sqrt{k}})^2} = 1 \to 1$$

2. On considère la suite de problèmes suivante :

$$\min f_k(x) = x_1 + x_2 - \frac{1}{k}\log(-x_1^2 + x_2 + 2) \qquad \text{s.c.} \qquad x_1^2 - x_2 - 2 < 0$$

Calculons les points critiques de f_k :

$$\nabla f_k(x) = 0 \iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{k}\frac{-2x_1}{-x_1^2+x_2+2} = 0 \\ 1 - \frac{1}{k}\frac{1}{-x_1^2+x_2+2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 1\cdot(-2x_1) = 0 \\ 1 = \frac{1}{k}\frac{1}{-x_1^2+x_2+2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ k(-x_1^2 + x_2 + 2) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{k} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{7}{4} + \frac{1}{k} \end{cases}$$

Pour vérifier si cette solution est réalisable, on reporte dans g : $g(x_k) = \frac{1}{4} - (-\frac{7}{4} + \frac{1}{k}) - 2 = -\frac{1}{k}$. On veut que $0 < -g(x_k) \leq 1$ pour que $-\log$ soit défini et positif, c'est bien le cas.

la suite (x_k) converge vers $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/4 \end{pmatrix}$ qui est donc une solution du problème initial. Le multiplicateur de Lagrange est approximé par le coefficient devant $\nabla g(x)$ dans le système ci-avant :

$$\frac{1}{c_k g(x)} = \frac{1}{k(\frac{1}{4} - (-\frac{7}{4} + \frac{1}{k}) - 2)} = \frac{1}{k(\frac{1}{k})} = 1 \to 1$$