TD 8 : Méthodes duales et primales

lionel.rieg@ensiie.fr

1 Méthode des plans séquents

Exercice 1

On s'intéresse au problème suivant en variables (0, 1) :

$$\min_x f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad \text{s. c.} \qquad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \tag{P}$$

1. Donner son problème dual (D).
2. Donner la position du minimum (sans contrainte) d'une fonction linéaire $g(x) = \sum_i a_i x_i$ en variables $(0, 1)$ en fonction des a_i.
3. Résoudre (D) par la méthode des plans sécants en partant de $X^{(0)} = \{(0,0,0), (1,1,0)\}$. On résoudra le problème maître graphiquement en représentant dans le plan (λ, z) les différents « plans sécants » induits par les contraintes du problème maître.
4. Soit λ^* la solution de (D). Le dernier sous-problème admet deux solutions. Montrer que, pour ces deux solutions x^*, (x^*, λ^*) n'est pas un point selle.

2 Méthode du gradient projeté

Exercice 2

On considère le problème (P) suivant :

$$\min x_1^2 + 4x_2^2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{P}$$

1. Représenter graphiquement les solutions réalisables (P).
2. Résoudre (P) par la méthode du gradient projeté en partant de $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Résoudre le problème (P') suivant par la méthode du gradient projeté, en partant de $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\min x^2 + xy + y^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y \leq 2 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \tag{P'}$$

Solutions

▶ Exercice 1

1. Le problème dual de (P) est :

$$\max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = \inf_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \tag{D}$$

avec $X = \{0,1\}^3$.

2. Si $a_i > 0$, on prend $x_i = 0$. Si $a_i < 0$, on prend $x_i = 1$. Enfin, si $a_i = 0$, on prend indifféremment $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.

3. Le problème dual s'écrit sous la forme suivante :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) & \text{pour tout } x \in X \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

La méthode des plans sécants consiste à résoudre le problème de façon itérative en calculant le maximum de θ sous une partie des contraintes. On compare ensuite cette solution approchée à toutes les contraintes en recalculant la valeur de z, à l'aide de la question précédente. Si la valeur trouvée est inférieure, cela signifie qu'une contrainte n'est pas satisfaites par le problème maître. Tant qu'une solution ainsi générée ne vérifie pas toutes les contraintes, on en ajoute une qui n'était pas satisfaite et on recommence. Le problème avec des contraintes partielles est appelé *problème maître* et la vérification qu'une solution du problème maître satisfait toutes les contraintes est appelé *sous-problème*.

Itération $k = 0$

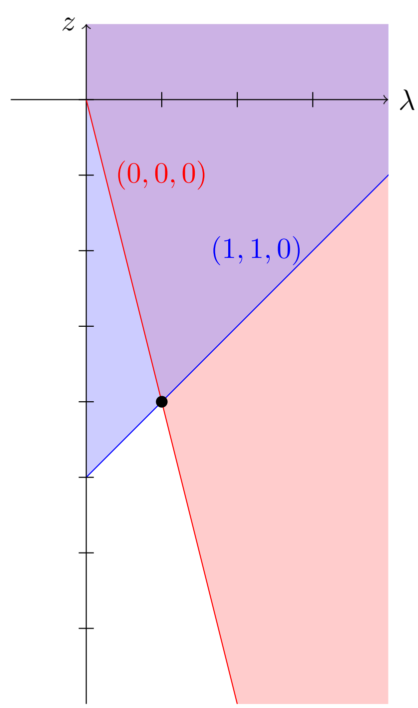
Le problème maître est :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -4\lambda & \text{pour } (0,0,0) \\ z \leq -5 + \lambda & \text{pour } (1,1,0) \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

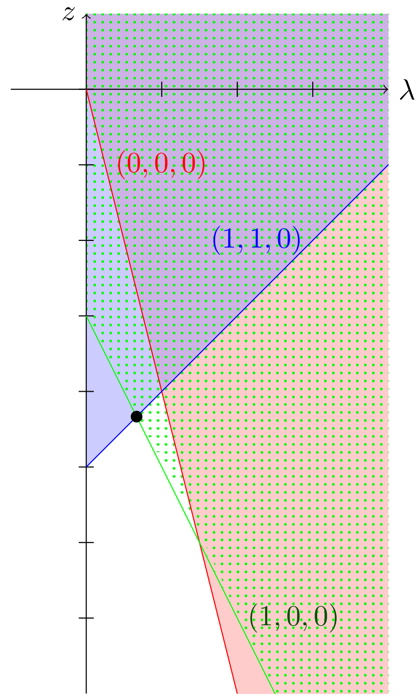
Graphiquement, on voit que le maximum est atteint pour $z^{(0)} = -4$ et $\lambda^{(0)} = 1$.
Le sous-problème est

$$\begin{aligned} z^* &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 1(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \\ &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -x_1 + x_2 + 4x_3 - 4 = -5 \end{aligned}$$

On a $z^{(0)} > z^*$ donc il reste des contraintes non satisfaites. Le minimum précédent est atteint en $(1,0,0)$ donc on ajoute la contrainte correspondante au problème maître.



Itération $k = 1$



Le problème maître est :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -4\lambda & \text{pour } (0,0,0) \\ z \leq -5+\lambda & \text{pour } (1,1,0) \\ z \leq -3-2\lambda & \text{pour } (1,0,0) \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

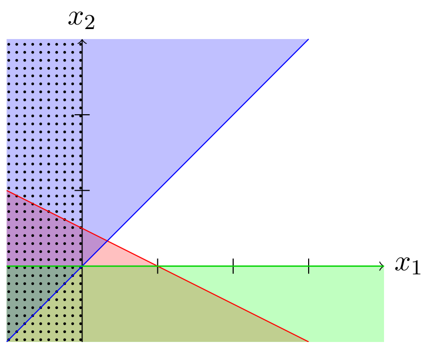
Graphiquement, on voit que le maximum est atteint pour $z^{(1)} = -\frac{13}{3}$ et $\lambda^{(1)} = \frac{2}{3}$.
Le sous-problème est

$$\begin{aligned} z^* &= \min_{x\in\{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \frac{2}{3}(2x_1+3x_2+4x_3-4) \\ &= \min_{x\in\{0,1\}^3} -\frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3} = -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

On a $z^{(1)} \leq z^*$ donc toutes les contraintes sont satisfaites. La valeur $z^{(1)}$ est donc le minimum, atteint en $(1,0,0)$ ou en $(1,1,0)$.

4. Ces deux solutions sont $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$.
   Pour $x^* = (1,0,0)$, la condition de complémentarité ($\lambda_i g_i(x) = 0$) n'est pas vérifiée : $\frac{2}{3}(2-4) \neq 0$.
   Pour $x^* = (1,1,0)$, la condition de réalisabilité n'est pas vérifiée : $2+3>4$.

▶ **Exercice 2**



On commence par mettre les contraintes sous la forme habituelle :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Le gradient de f en x est $\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$.

Itération 1 Seule la seconde contrainte est saturée en P_0. On a donc $L = \{y \mid -y_1 + y_2 = 0\}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$. L'opérateur de projection sur L s'écrit dans le cas général $P_L = I - A^T(AA^T)^{-1}A$. Ici, $AA^T = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ et $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P_L = I - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. En P_0, le gradient de f vaut $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On en tire $d = P_L(-\nabla f(P_0)) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$. On peut vérifier qu'il s'agit bien de la projection orthogonale sur L : $\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on a $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$ et $-(-5) + (-5) = 0$.

Le point P_1 s'écrit donc $P_1 = P_0 + \alpha d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5\alpha \\ 1-5\alpha \end{pmatrix}$. Les contraintes du problème imposent :

$$\begin{cases} 1-5\alpha + 2(1-5\alpha) \geq 1 \\ -(1-5\alpha) + (1-5\alpha) \leq 0 \\ 1-5\alpha \geq 0 \\ 1-5\alpha \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \leq \frac{2}{15} \\ 0 \leq 0 \\ \alpha \leq \frac{1}{5} \end{cases} \iff \alpha \leq \frac{2}{15}$$

Minimisons f dans cette direction : $f(P_1) = (1-5\alpha)^2 + 4(1-5\alpha)^2 = 5(1-5\alpha)^2$ qui est minimal lorsque $(1-5\alpha)^2 = 0$, donc pour $\alpha = \frac{1}{5}$.

Cette valeur est trop grande et on prend donc à la place la borne du domaine : $\alpha = \frac{2}{15}$ qui donne $P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ (faire par exemple un tableau de variation pour s'assurer qu'il s'agit bien du minimum).

Itération 2 En P_1, les contraintes saturées sont les deux premières.

On a alors $L = \{y \mid y_1 + 2y_2 = 0, -y_1 + y_2 = 0\} = \{0\}$, ce qui donne $P_L(-\nabla f(P_1)) = 0$. Exprimons donc $-\nabla f(P_1)$ dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (l'opposé des gradient de g_1 et g_2 en P_1) :

$$\nabla f(P_1) + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -3\lambda_1 = -\frac{10}{3} \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 - \frac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{10}{9} \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

On a en fait une formule générale pour calculer les composantes : $\lambda = (AA^T)^{-1}A(-\nabla f(P))$.

Puisque λ_2 est négatif, on relâche la seconde contrainte et on prend donc $L = \{y \mid -x_1 - 2x_2 = 0\}$. On calcule alors $P_L = I - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ puis $P_L(-\nabla f(P_1)) = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/15 \\ -4/15 \end{pmatrix}$. Écrivons $P_2 = P_1 + \alpha d = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 8/15 \\ -4/15 \end{pmatrix}$. Les contraintes du problème imposent :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{15} + 2(\frac{1}{3} - \alpha\frac{4}{15}) \geq 1 \\ -(\frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{15}) + (\frac{1}{3} - \alpha\frac{4}{15}) \leq 0 \\ \frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{15} \geq 0 \\ \frac{1}{3} - \alpha\frac{4}{15} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \geq 1 \\ \alpha \geq 0 \\ \alpha \geq -\frac{5}{8} \\ \alpha \leq \frac{5}{4} \end{cases} \iff 0 \leq \alpha \leq \frac{5}{4}$$

Minimisons $f(P_2) = (\frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{15})^2 + 4(\frac{1}{3} - \alpha\frac{4}{15})^2$ en fonction de α. On a :

$$f'(P_2) = 2\frac{8}{15}(\frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{15}) - 8\frac{4}{15}(\frac{1}{3} - \frac{4}{15}\alpha) = 0 \iff -\frac{1}{3} + \frac{16}{15}\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{5}{16}$$

Les contraintes sur α sont respectées. Ceci donne alors $P_2 = P_1 + \frac{5}{16}d = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \frac{5}{16} \begin{pmatrix} 8/15 \\ -4/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

Itération 3 En P_2, la seule contrainte saturée est la première.
On a alors $L = \{y \mid y_1 + 2y_2 = 0\}$ comme à l'itération précédente. Continuons l'algorithme : on connaît déjà P_L et on calcule $P_L(-\nabla f(P_2)$:

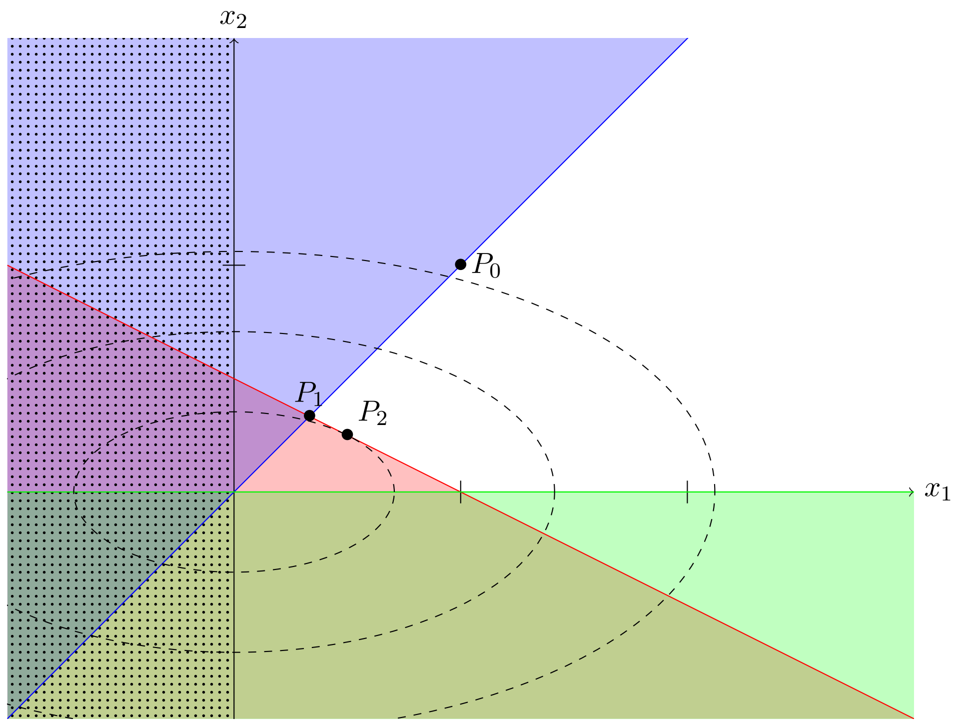
$$P_L(-\nabla f(P_1)) = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La projection étant nulle, on exprime le gradient sur l'orthogonal de L, c'est a dire selon la direction donnée par $-\nabla g_1 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\nabla f(P_2) + \lambda_1 \nabla g_1 = 0 \iff \nabla f(P_2) = \lambda_1(-\nabla g_1) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = 1$$

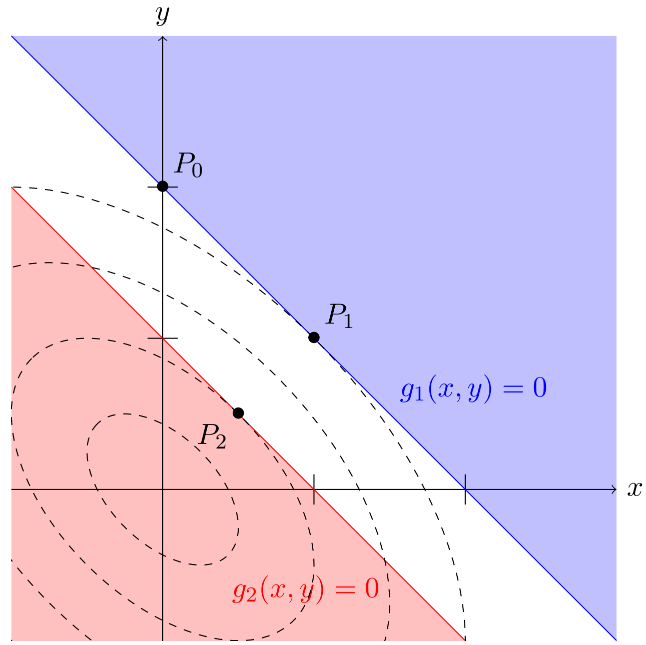
Comme $\lambda_1 \geq 0$, les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées et on arrête l'algorithme.

Résumé graphique Si on note les points successifs sur le dessin, on constate bien qu'on se déplace sur la frontière du domaine des solutions réalisables.



▶ **Exercice 3** Les contraintes se mettent sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 & g_1(x, y) \\ -x - y + 1 \leq 0 & g_2(x, y) \end{cases}$$



Itération 0 On calcule $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix}$ puis $\nabla f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. En P_0, seule la première contrainte est saturée et on a donc $L_1 = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit $P_{L_1} = I - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = I - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ puis $d_0 = P_{L_1}(-\nabla f(P_0)) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc $P_1 = P_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 - \alpha \end{pmatrix}$ et clairement les contraintes sont satisfaites pour toute valeur de α : elles deviennent $0 \leq 0$ et $-1 \leq 0$. La dérivée directionnelle de f en P_1 selon d_0 est $\nabla f(P_1).d_0 = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2 - \alpha \\ 4 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 2$. L'optimum est atteint lorsqu'elle s'annule, c'est à dire pour $\alpha = 1$ donc en $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Itération 1 On a $I(P_1) = \{1\}$ et $P_{L_1}(\nabla f(P_1)) = 0$ car on a atteint le minimum selon cette direction à l'étape précédente.

$$\nabla f(P_1) + \lambda \nabla g_1(P_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -3$$

Puisque $\lambda < 0$, on relâche cette contrainte.

Itération 2 On n'a plus de contrainte, donc $L_\emptyset = \mathbb{R}^2$ et il est inutile de projeter. On évolue donc dans la direction opposée au gradient : $d_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, ce qui donne $P_2 = P_1 + \alpha d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. La dérivée directionnelle de f en P_2 selon d_1 est $\nabla f(P_2).d_1 = \begin{pmatrix} 2 - 6\alpha + 1 - 3\alpha \\ 2 - 6\alpha + 1 - 3\alpha \end{pmatrix} (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 - 3\alpha)$. Elle s'annule en $\alpha = \frac{1}{3}$. Les contraintes donnent

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha + 1 - 3\alpha - 2 \leq 0 \\ -(1 - 3\alpha) - (1 - 3\alpha) + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -6\alpha \leq 0 \\ 6\alpha - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$$

Puisque l'optimum est hors des solutions réalisables, on ne peut le prendre. Le minimum entre 0 et $\frac{1}{6}$ est atteint en $\frac{1}{6}$ car la dérivée directionnelle est tout le temps négative sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}]$. On obtient donc $P_2 = P_1 + \frac{1}{6}d_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

Itération 3 On a $I(P_2) = \{2\}$ donc $L_2 = \{(x, y) \mid -x - y = 0\} = L_1$. Par ailleurs, $\nabla f(P_2) = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}$ et $P_{L_2}(-\nabla f(P_2)) = 0$. Exprimons donc $\nabla f(P_2)$ sur l'orthogonal de L_2 :

$$\nabla f(P_2) + \lambda \nabla g_2(P_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Puisque $\lambda \geq 0$, les condition de Kuhn-Tucker sont vérifiées et on arrête l'algorithme.