TD 7 : Conditions d'optimalité et relaxation

lionel.rieg@ensiie.fr

Exercice 1

On considère le problème suivant sur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: minimiser $x_1^2 + x_2^2$ sous la contrainte $2x_1 + x_2 \leq -4$.

1. Exprimer le problème de façon graphique.
2. Donner les conditions de Kuhn-Tucker et les résoudre.
3. Sont-elles suffisantes pour l'optimalité ?
4. En déduire la solution du problème.
5. Écrire la fonction duale.
6. Résoudre le problème dual.
7. Y a-t-il un saut de dualité entre les problèmes primal et dual ?

Exercice 2

Un randonneur prépare avec soin le contenu de son sac-à-dos. Le poids total de nourriture emportée ne pourra pas excéder 4 kg. Il dispose de trois aliments de valeurs nutritives et de poids différents.

aliment	poids (kg)	valeur nutritive
1	2	3
2	3	2
3	4	1

Le randonneur cherche quels aliments emporter de façon à maximiser la valeur nutritive totale, sans toutefois dépasser le poids total de 4 kg.

1. Montrer que le problème du randonneur peut se formuler comme le problème suivant en variables (0, 1) :

$$\min_x f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad \text{s. c.} \qquad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \tag{P}$$

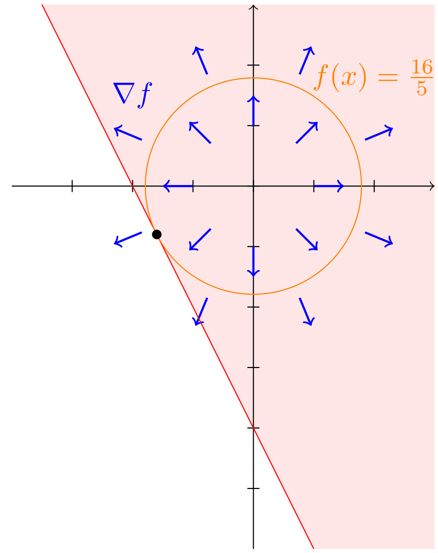
On considère le problème suivant, dual de (P), où $X = \{0, 1\}^3$:

$$\max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = \inf_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \tag{D}$$

2. Donner la position du minimum (sans contrainte) d'une fonction linéaire $g(x) = \sum_i a_i x_i$ en variables $(0, 1)$ en fonction des a_i.
3. Résoudre (D) par la méthode des plans sécants en partant de $X^{(0)} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$. On résoudra le problème maître graphiquement en représentant dans le plan (λ, z) les différents « plans sécants » induits par les contraintes du problème maître.
4. Soit λ^* la solution de (D). Le dernier sous-problème admet deux solutions. Montrer que, pour ces deux solutions x^*, (x^*, λ^*) n'est pas un point selle.

Solutions

▶ Exercice 1



1. On peut remarquer qu'on cherche à minimiser le carré de la distance euclidienne. Puisque le carré est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, cela revient à minimiser la distance euclidienne. Comme on minimise la distance euclidienne, cela revient à déterminer la distance entre l'origine et l'espace des solutions réalisables, qui est le demi-plan inférieur délimité par la droite d'équation $2x_1x_2 = -4$. Autrement dit, on cherche la projection de l'origine sur la droite d'équation $x_2 = -2x_2 - 4$.
   Sur la figure, la norme du gradient de f n'est pas à l'échelle : le champ de vecteur donne juste une idée des directions d'augmentation de f.
2. Avec la fonction de Lagrange (voir ci-dessous), on peut les exprimer ainsi :

$$K.T. \quad \begin{cases} \lambda_i \geq 0 & 0 \leq i \leq m \\ \nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0 & \\ \lambda_i g_i(x^*) & 0 \leq i \leq m \end{cases}$$

   Ici, cela donne :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ 2x_1 + 2\lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ \lambda(2x_1 + x_2 + 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ x_1 = -\lambda \\ x_2 = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda(-2\lambda - \frac{\lambda}{2} + 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_1 = x_2 = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{8}{5}, x_1 = -\frac{8}{5}, x_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

   Seul le second cas est une solution réalisable.
3. La contrainte d'inégalité et la fonction objectif sont convexes donc les conditions K.T. sont suffisantes.
4. On a $x^* = \begin{pmatrix} -8/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$. On en tire $f(x^*) = 16/5$.
5. La fonction duale est $\theta(u, v) = \inf_x L(x, u, v)$ où $L(x, u, v) = f(x) + u.g(x) + v.h(x)$ est la fonction de Lagrange, avec g les contraintes d'inégalité et h celles d'égalité.
   Ici, on a qu'une contrainte d'inégalité donc cela donne

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 + 4)$$

6. On utilise les méthodes vues pour l'optimisation sans contraintes.
   On constate que L est convexe comme somme de fonctions convexes (le signe de λ n'importe pas car la contrainte est affine donc à la fois convexe et concave). Elle admet donc au plus un point critique qui, lorsqu'il existe, est un minimum global. Le gradient de L en fonction de x est : $\nabla L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2\lambda \\ 2x_2 + \lambda \end{pmatrix}$.

La contrainte $\nabla L(x^*, \lambda) = 0$ donne $x^* = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$ qui est donc un minimum global. On a alors :

$$L(x^*, \lambda) = \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda(-2\lambda - \frac{\lambda}{2} + 4) = -\frac{5}{4}\lambda^2 + 4\lambda$$

C'est un trinôme du second degré, de coefficient directeur strictement négatif donc le maximum est atteint au sommet de la parabole, en $-\frac{b}{2a}$. Ici, cela donne : $\lambda = \frac{8}{5}$ et la valeur du minimum est $\frac{16}{5}$.

7. On trouve la même valeur donc il n'y a pas de saut de dualité, *i.e.* l'écart entre la valeur de la fonction duale et la fonction objectif.

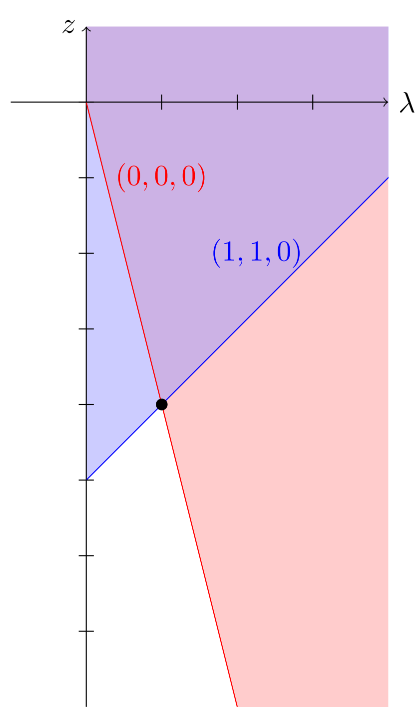
▶ **Exercice 2**

1. La contrainte est exactement celle du poids. Puisqu'on cherche à maximiser, on prend l'opposé de la fonction objectif qu'on cherche à minimiser : $f(x) = -(3x_1 + 4x_2 + x_3)$.
2. Si $a_i > 0$, on prend $x_i = 0$. Si $a_i < 0$, on prend $x_i = 1$. Enfin, si $a_i = 0$, on prend indifféremment $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.
3. Le problème dual s'écrit sous la forme suivante :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) & \text{pour tout } x \in X \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

La méthode des plans sécants consiste à résoudre le problème de façon itérative en calculant le maximum de θ sous une partie des contraintes. On compare ensuite cette solution approchée à toutes les contraintes en recalculant la valeur de z, à l'aide de la question précédente. Si la valeur trouvée est inférieure, cela signifie qu'une contrainte n'est pas satisfaites par le problème maître. Tant qu'une solution ainsi générée ne vérifie pas toutes les contraintes, on en ajoute une qui n'était pas satisfaite et on recommence. Le problème avec des contraintes partielles est appelé *problème maître* et la vérification qu'une solution du problème maître satisfait toutes les contraintes est appelé *sous-problème*.

Itération $k = 0$



Le problème maître est :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -4\lambda & \text{pour } (0,0,0) \\ z \leq -5 + \lambda & \text{pour } (1,1,0) \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

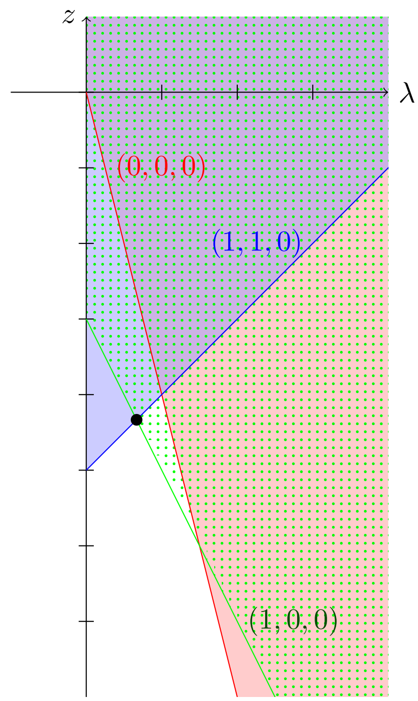
Graphiquement, on voit que le maximum est atteint pour $z^{(0)} = -4$ et $\lambda^{(0)} = 1$.

Le sous-problème est

$$\begin{aligned} z^* &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 1(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \\ &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -x_1 + x_2 + 4x_3 - 4 = -5 \end{aligned}$$

On a $z^{(0)} > z^*$ donc il reste des contraintes non satisfaites. Le minimum précédent est atteint en $(1,0,0)$ donc on ajoute la contrainte correspondante au problème maître.

Itération $k = 1$



Le problème maître est :

$$\max z \quad \text{s. c.} \quad \begin{cases} z \leq -4\lambda & \text{pour } (0,0,0) \\ z \leq -5+\lambda & \text{pour } (1,1,0) \\ z \leq -3-2\lambda & \text{pour } (1,0,0) \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Graphiquement, on voit que le maximum est atteint pour $z^{(1)} = -\frac{13}{3}$ et $\lambda^{(1)} = \frac{2}{3}$.
Le sous-problème est

$$\begin{aligned} z^* &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \frac{2}{3}(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4) \\ &= \min_{x \in \{0,1\}^3} -\frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3} = -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

On a $z^{(1)} \leq z^*$ donc toutes les contraintes sont satisfaites. La valeur $z^{(1)}$ est donc le minimum, atteint en $(1,0,0)$ ou en $(1,1,0)$.

4. Ces deux solutions sont $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$.
   Pour $x^* = (1,0,0)$, la condition de complémentarité $(\lambda_i g_i(x) = 0)$ n'est pas vérifiée : $\frac{2}{3}(2-4) \neq 0$.
   Pour $x^* = (1,1,0)$, la condition de réalisabilité n'est pas vérifiée : $2+3 > 4$.