TD 6 : Qualification de Arrow-Hurvicz-Uzawa

lionel.rieg@ensiie.fr

Exercice 1

On considère le problème suivant :

$$\text{minimiser } f(x) \text{ s.c. (sous contraintes) pour tout } i \leqslant n, g_i(x) \leqslant 0 \tag{P}$$

On note $S = \{x \mid \forall i \leqslant n, g_i(x) \leqslant 0\}$ l'ensemble des solutions réalisables.
Soit x^* réalisable. On définit $I(x^*) = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$ les contraintes saturées par x^*.
On suppose que :

- pour $i \notin I(x^*)$, g_i est continue en x^*,
- pour $i \in I(x^*)$, g_i est concave et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

On note $F(x^*) = \{y \mid \forall i \in I(x^*), \nabla g_i(x^*).y \leqslant 0\}$.
On cherche à montrer que x^* est qualifié.

1. Soit $y \in F(x^*)$. On pose $x_k = x^* + \frac{1}{k}y$. Montrer que x_k est réalisable pour k suffisamment grand.
2. En déduire que x^* est qualifié, *i.e.* que $F(x^*) = T(S, x^*)$, où $T(S, x^*)$ est le cône tangent à S en x^*.
3. Application :
   On prend $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leqslant 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leqslant 0$, $f(x) = x_1 - x_2$ et $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que x^* ne vérifie pas la qualification de Cottle.
   (b) Montrer que x^* est qualifié et expliciter le cône tangent en x^*.
   (c) En déduire que x^* n'est pas minimum local de (P).

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$\min f(x) \text{ s.c. } x \in S = \{x \mid Ax \leqslant b\}$$

1. Montrer que tout $x \in S$ est qualifié.
2. Donner $T(S, x)$ pour $x \in S$ ainsi que la condition nécessaire d'optimalité.
3. Montrer que si f est convexe, alors la condition est suffisante pour l'optimalité globale.
4. Application :
   Soit le problème $\min 2x_1 + x_2$ s.c. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$.
   Montrer que $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas minimum et que $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est minimum global.

Exercice 3

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $x \in C$.

1. Montrer que $C \setminus \{x\} \subseteq T(C, x)$.
2. On appelle cône(A) le plus petit cône contenant A. Montrer que $T(C, x) = \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})}$.
3. En déduire que $T(C, x)$ est convexe.
4. Soit $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Donner $T(C, 0)$ et vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T(C, 0)$.

Solutions

▶ **Exercice 1** 1. Pour montrer que x_k est réalisable, on montre que les contraintes $g_i(x_k) \leq 0$ sont vérifiées. Pour cela, on distingue deux cas, suivant que $i \in I(x^*)$ ou non.

– $i \in I(x^*)$: Puisque g_i est $\mathcal{C}^1$, la caractérisation des fonctions concaves donne :

$$g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{=0} \leq \nabla g_i(x^*).(x_k - x^*) = \nabla g_i(x^*).\frac{1}{k}y$$

Par hypothèse sur y, on sait que $\nabla g_i(x^*).y \leq 0$, ce qui donne au final $g_i(x_k) \leq 0$.

– $i \notin I(x^*)$: Puisque x^* est réalisable est que $g_i(x^*) \leq 0$ n'est pas saturée, on a $g_i(x^*) < 0$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers x^* et g_i est continue, donc $g_i(x_k)$ tend vers $g_i(x^*) < 0$. En particulier, à partir d'un certain rang, on a $g_i(x_k) \leq 0$.

2. L'inclusion $T(S, x^*) \subseteq F(x^*)$ vient du cours. Montrer la réciproque demande d'exhiber deux suites (x_k) et (λ_k) telles que $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} x^*$ et $\lambda_k(x_k - x^*) \xrightarrow{k\to+\infty} y$. En prenant la suite (x_k) définie avant, on a déjà $x_k \to x^*$ et $x_k - x^* = \frac{1}{k}y$. De ce fait, en posant $\lambda_k = k$, on a $\lambda_k(x_k - x^*) = y$ donc en particulier $\lambda_k(x_k - x^*) \to y$.

3. (a) On a $I(x^*) = \{1, 2\}$, $\nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en tire :

$$F_0(x^*) = \{y \mid \forall i \in I(x^*).\, \nabla g_i(x^*).y < 0\} = \{y \mid -2y_1 < 0, y_1 < 0\} = \emptyset$$

Ainsi, la qualification de Cottle ($F_0(x^*) \neq \emptyset$) ne s'applique pas.

(b) Les fonctions g_1 et g_2 sont concaves et $\mathcal{C}^1$ donc d'après les questions précédentes, x^* est qualifié et

$$T(S, x^*) = F(x^*) = \{y \mid \forall i \in I(x^*).\, \nabla g_i(x^*).y < 0\} = \{y \mid -2y_1 \leq 0, y_1 \leq 0\} = \{y \mid y_1 = 0\}$$

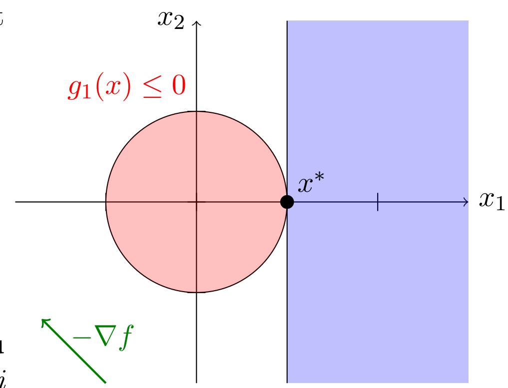
(c) Puisque x^* est qualifié, les conditions de Kuhn-Tücker sont nécessaires pour avoir un minimum local.

$$K.T. \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0$$

Ici, cela donne :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de solution à cause de la second composante du vecteur. Ainsi, x^* n'est pas minimum local de (P), *a fortiori* pas minimum global.



▶ **Exercice 2**

1. les contraintes sont affines donc concaves et $\mathcal{C}^1$ (en particulier $\mathcal{C}^0$) et on peut donc appliquer l'exercice précédent : la qualification de Arrow-Hurvicz-Uzawa permet de conclure.

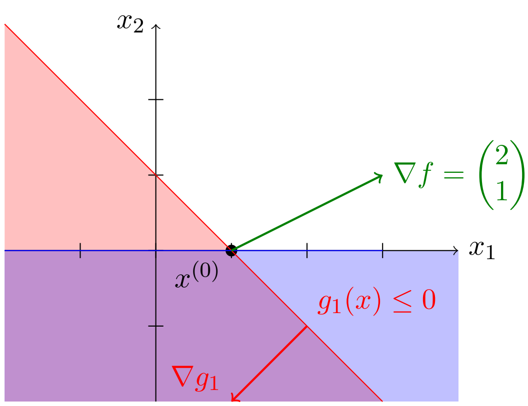
2. On a besoin de distinguer les contraintes saturées. On décompose donc la matrice A en deux sous-parties : A_1 contient les contraintes saturées et A_2 les contraintes non saturées. Au besoin, on réordonne les lignes de A. On décompose de même b, ce qui donne au final :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x < b_2 \end{cases}$$

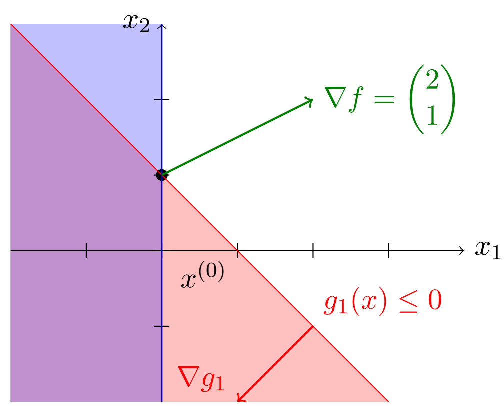
On a alors $T(S,x^*) = F(x) = \{y \mid \forall i \in I(x^*), \nabla g_i(x).y \leq 0\} = \{y \mid A_1 y \leq 0\}$.
La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre est $\forall y \in T(S,x^*) = \{y \mid A_1 y \leq 0\}, \nabla f(x).y \geq 0$.

3. Soit $z \in S$. On veut montrer que $f(z) \geq f(x)$.
Si f est convexe sur S, la caractérisation des fonctions convexes au premier ordre donne $\forall x, z \in S, f(z) - f(x) \geq \nabla f(x).(z-x)$. Or $z - x \in T(S,x^*) = F(x^*)$ car $A_1(z-x) = \underbrace{A_1 z}_{\leq b_1} - \underbrace{A_1 x}_{= b_1} \leq b_1 - b_1 = 0$.
La condition nécessaire de la question précédente combinée à la convexité de f donne :
$$f(z) - f(x) \geq \nabla f(x).(z-x) \geq 0$$
et x est donc un minimum global.

4. Sur les deux figures, le cône tangent (translaté au point courant) est la partie non colorée du dessin.



$T(S,x^{(0)})$ est donné par $\begin{cases} -d_1 - d_2 \leq 0 \\ -d_2 \leq 0 \end{cases}$
On a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T(S,x^{(0)})$ mais $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$.
La condition nécessaire de minimum local n'est donc pas remplie.



$T(S,x^{(1)})$ est donné par $\begin{cases} -d_1 - d_2 \leq 0 \\ -d_1 \leq 0 \end{cases}$
On a $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 2d_1 + d_2 = \underbrace{d_1}_{\geq 0} + \underbrace{d_1 + d_2}_{\geq 0} \geq 0$.
Puisque f est linéaire (donc convexe), la condition nécessaire est suffisante pour dire que $x^{(1)}$ est un minimum global.

▶ Exercice 3

1. Prenons $y \in C$ différent de x. On pose $x_k = x + \frac{1}{k}(y-x)$. Il appartient à C car il est sur le segment $[xy]$ puisque $0 < \frac{1}{k} \leq 1$. De plus, on a $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} x$ et $k(x_k - x) = y - x$ donc $\lambda_k = k$ donne $\lambda_k(x_k - x) \xrightarrow{k \to +\infty} y - x$.

2. On montre la double inclusion.

$\Longleftarrow$ Puisque $C \backslash \{x\}$ est convexe, le cône engendré par $C \backslash \{x\}$ est égal au cône *convexe* engendré par $C \backslash \{x\}$.
De plus, puisque $T(C,x)$ est un cône, on a par définition de $\text{cône}(C \setminus \{x\})$, $\text{cône}(C \setminus \{x\}) \subseteq T(C,x)$.
Enfin, vu que $T(C,x)$ est fermé, on a bien $\overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})} \subseteq T(C,x)$.

$\Longrightarrow$ Soit $y \in T(C,x)$. Il existe donc des suites x_k et λ_k telles que $x_k \in C$, $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} x$ et $\lambda_k(x_k - x) \xrightarrow{k \to +\infty} y - x$. Puisque $x_k \in C$, $x_k - x \in \text{cône}(C \setminus \{x\})$ donc $\lambda_k(x_k - x) \in \text{cône}(C \setminus \{x\})$ et enfin $y \in \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})}$.
On peut remarquer que l'inclusion $T(C,x) \subseteq \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})}$ n'utilise pas la convexité de C.

3. On a $T(C,x) = \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})}$. Or $\text{cône}(C \setminus \{x\})$ est convexe et l'adhérence préserve la convexité donc $T(C,x)$ est convexe.
4. On a $T(C,x) = \overline{\text{cône}(C \setminus \{x\})} = \overline{\text{cône}(C)}$ car $0 \in \overline{C}$. De plus, C est un cône donc $\text{cône}(C) = C$ qui donne $\overline{\text{cône}(C)} = \overline{C}$.

   Pour montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans $T(C,0)$, on doit trouver une suite x_k qui « tend horizontalement » vers x.

   On prend $x_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k^2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_k = k$. on a alors $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} x$ et $\lambda_k (x_k - 0) = k \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \to +\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.