TD 12 : Résolution

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Quelques rappels sur Friedman (*cf.* DM 2)

Exercice 1 *Corrigé du DM 2*

On va corriger ici les questions qui ont posées le plus de difficultés dans le DM 2.

1. Rappeler la définition de la R-traduction.
2. Prouver que $\neg_R \neg_R A^{\neg_R} \vdash_{NJ} A^{\neg_R}$. On ne traitera que les cas où A est une conjonction ou une implication.
3. Prouver que si $\Gamma \vdash_{NK} A$ et si les variables libres de R n'apparaissent pas dans cette dérivation, alors $\Gamma^{\neg_R} \vdash_{NJ} A^{\neg_R}$, où $\Gamma^{\neg_R}$ est l'application de $(\,\cdot\,)^{\neg_R}$ à toutes les formules de Γ. On ne traitera que les cas des règles $\vee_e$ et $\exists_e$.
4. Prouver la R-traduction du schéma de Leibniz dans HA.
5. Prouver que $PA \vdash \forall x \exists y\, (a \doteq b)$ entraîne $HA \vdash \forall x \exists y\, (a \doteq b)$.

2 Résolution propositionnelle

On va montrer la correction et la complétude de la méthode de résolution. Pour rappel, voici la règle de résolution :

$$\frac{C_1 \qquad C_2}{(C_1 \setminus \{a\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{a}\})}\ {\scriptstyle a \in C_1, \overline{a} \in C_2}$$

La clause $C := (C_1 \setminus \{a\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{a}\})$ est appelée la *résolvante* (sur a) des clauses C_1 et C_2.

Un *arbre de résolution* pour un ensemble de clause S est un arbre binaire tel que :

- les nœuds internes et les feuilles sont étiquetés par des clauses,
- les clauses qui étiquettent les feuilles sont dans S,
- la clause qui étiquette un nœud interne est la résolvante des clauses qui étiquettent ses fils

Un *arbre de réfutation* est un arbre de résolution dont la clause associée à la racine est la clause vide $\square$.

Exercice 2 *Correction de la méthode de résolution*

On va montrer le théorème suivant :

Théorème (Correction)
Si S possède un arbre de réfutation, alors S est insatisfiable.

1. Montrer que la règle de résolution préserve la validité : dans tout modèle $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models C_1$ et $\mathcal{M} \models C_2$, alors $\mathcal{M} \models C$.
2. En déduire le théorème.

Exercice 3 *Complétude de la règle de résolution*

On va démontrer la réciproque du théorème précédent.

Théorème (Complétude)
Si S est insatisfiable, alors S possède un arbre de réfutation.

1. Montrer que s'il existe L et C tels que $L, \overline{L} \in C \in S$, alors $S' = S \setminus \{C\}$ est satisfiable si et seulement si S l'est. De plus, tout arbre de résolution pour S' est un arbre de résolution pour S.
2. Montrer que s'il existe L et C tels que $L \in C \in S$ et $\overline{L}$ n'apparaît pas dans S, alors $S' = S \setminus \{C\}$ est satisfiable si et seulement si S l'est. De plus, tout arbre de résolution pour S' est un arbre de résolution pour S.
3. Pourquoi peut-on supposer que S est fini ?

On suppose que S est fini. La démonstration va alors se faire par récurrence sur le nombre de formules atomiques (aussi appelées *atomes*) distinctes présentes dans S.

4. Démontrer le cas de base de la récurrence.

Pour l'étape inductive, grâce aux questions 1 et 2, on peut supposer que tous les atomes apparaissent positivement et négativement dans S et qu'aucune clause ne contient à la fois L et $\overline{L}$. Prenons un atome a de S. On construit S' comme la réunion des deux ensembles suivants :

$$\{C \mid \exists C_1 \in S \, \exists C_2 \in S.\, C \text{ est la résolvante sur } a \text{ de } C_1 \text{ et } C_2\} \qquad \text{et} \qquad \{C \in S \mid a \notin C \land \overline{a} \notin C\}$$

5. En utilisant S', démontrer le cas inductif.

3 Résolution au premier ordre

À présent, on va passer au cas du premier ordre sans égalité. Dans ce cadre, les clauses peuvent contenir des variables. La règle de résolution est généralisée comme suit :

$$\frac{C_1 \qquad C_2}{[(C_1\rho_1 \setminus D_1\rho_1) \cup (C_2\rho_2 \setminus D_2\rho_2)]\sigma}$$

où :
- $D_1 \subseteq C_1$ et $D_2 \subseteq C_2$,
- les littéraux de D_1 sont tous positifs et ceux de D_2 sont tous négatifs,
- ρ_1 et ρ_2 sont des renommages des variables de C_1 et C_2 de façon à les rendre disjointes,
- σ est un mgu de l'ensemble $D_1\rho_1 \cup D_2\rho_2$ où l'on ignore les signes des littéraux.

On dit alors que C est la résolvante de C_1 et C_2 par rapport à $(D_1, D_2, \rho_1, \rho_2, \sigma)$.

Théorème (Correction)
Si S possède un arbre de réfutation, alors S est insatisfiable.

Lemme (Relèvement)
Si S est un ensemble fini de clause et S_g est un ensemble fini d'instances close de S et si T_g est un arbre de résolution pour S_g, alors il existe un arbre de résolution T pour S tel que la racine de T_g soit une instance close de celle de T.

Théorème (Complétude)
Si S est insatisfiable, alors S possède un arbre de réfutation.

Exercice 4 *Démonstrations*

1. En utilisant la même méthode que pour le cas propositionnel, montrer le théorème de correction.
2. En utilisant le théorème de Herbrand, la complétude de la résolution propositionnelle et le lemme de relèvement, montrer le théorème de complétude.
3. Montrer le lemme de relèvement.