TD 10 : Réversibilités dans LK_0

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Vous avez vu en cours que les règles du calcul des séquents viennent en deux variantes : les règles *additives* et les règles *multiplicatives*. Voici ci-dessous ces deux versions du calcul des séquent propositionnel classique (LK_0).

Système additif

Le groupe identité :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,\text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\,\text{Cut}$$

Le groupe structurel :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,W_g \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,C_g \quad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,W_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,C_d \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\,E_d$$

Le groupe logique :

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to_g \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_g^1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_g^2 \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_g \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_d^1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_d^2 \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg_d$$

Système multiplicatif

Le groupe identité :

$$\frac{}{A \vdash A}\,\text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,\text{Cut}$$

Le groupe structurel :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,W_g \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,C_g \quad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,W_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,C_d \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\,E_d$$

Le groupe logique :

$$\frac{\Gamma_1, B \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \to_g \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_g \quad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vee B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \vee_g \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to_d \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2} \wedge_d \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_d \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg_d$$

Dans les trois premiers exercices, puisqu'on travaille en logique classique, on se passera du connecteur d'implication $A \to B$ qu'on peut remplacer par $\neg A \vee B$, ceci afin de limiter les cas à traiter dans les preuves. De même, par dualité $\wedge/\vee$, on ne traitera pas le cas de la disjonction.

Exercice 1 *Deux présentations de LK$_0$*

1. Montrer que les règles d'affaiblissement sont admissibles dans le système additif.
2. Montrer que les présentations additives et multiplicatives de LK$_0$ sont équivalentes.
3. De quelles règles a-t-on besoin pour cela ?

Exercice 2 *Réversibilité sémantique*

Une règle est dite *sémantiquement réversible* lorsque la validité de la conclusion entraîne celle des prémisses.

1. Quelles sont les règles sémantiquement réversibles des connecteurs de LK$_0$ (en comptant les versions additive et multiplicative de chaque règle) ? Donner un contre-exemple pour celles qui ne le sont pas.
2. Montrer la complétude du fragment sémantiquement réversible de LK$_0$.

Exercice 3 *Réversibilité syntaxique*

Une règle est dite *syntaxiquement réversible* lorsqu'on peut prouver les prémisses à partir de la conclusion.

1. Pourquoi appelle-t-on ces règles des règles « réversibles » ? À quoi cela peut-il servir ?
2. Utiliser l'exercice précédent pour trouver quelles sont les règles de connecteurs syntaxiquement réversibles.
3. Déterminer directement quelles sont les règles syntaxiquement réversibles de LK$_0$ (en comptant les versions additive et multiplicative de chaque règle) ? Donner un contre-exemple pour celles qui ne le sont pas.
4. Donner un algorithme pour décider le fragment syntaxiquement réversible de LK$_0$.
   Montrer sa correction et sa complétude.

On ajoute à présent à LK$_0$ les règles des quantificateurs pour obtenir LK :

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.A, \Delta}\ \exists_d \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A \vdash \Delta}\ \exists_g \quad (x \notin FV(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.A, \Delta}\ \forall_d \quad (x \notin FV(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A \vdash \Delta}\ \forall_g$$

Exercice 4

Prouver les formules suivantes dans LK.

1. $(\exists y.\forall x.\, P(x, y)) \to \forall x.\exists y.\, P(x, y)$
2. $((\forall x.\, A) \to B) \to \exists x.\, (A \to B)$
3. $((\exists x.\, A) \to B) \to \forall x.\, (A \to B)$ (si $x \notin FV(B)$)
4. $((\forall x.\, A) \wedge B) \to \forall x.\, (A \wedge B)$ (si $x \notin FV(B)$)
5. $\neg(\forall x.\, A) \to \exists x.\, \neg A$
6. $\neg(\exists x.\, A) \to \forall x.\, \neg A$
7. $\exists y.\, (P y \to \forall x.P\, x)$

Exercice 5 *Mise en forme prénexe*

Démontrer que toute formule est équivalente à une formule en forme prénexe.