TD 10 : Réversibilités dans LK_0

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Vous avez vu en cours que les règles du calcul des séquents viennent en deux variantes : les règles *additives* et les règles *multiplicatives*. Voici ci-dessous ces deux versions du calcul des séquent propositionnel classique (LK_0).

Système additif

Le groupe identité :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{Cut}$$

Le groupe structurel :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ W_g \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ C_g \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ W_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ C_d \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ E_d$$

Le groupe logique :

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g^1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g^2 \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_d^1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_d^2 \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg_d$$

Système multiplicatif

Le groupe identité :

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{Axiom} \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \text{Cut}$$

Le groupe structurel :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ W_g \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ C_g \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ E_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ W_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ C_d \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ E_d$$

Le groupe logique :

$$\frac{\Gamma_1, B \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_g \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vee B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_d \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2}\ \wedge_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_d \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg_d$$

Dans les trois premiers exercices, puisqu'on travaille en logique classique, on se passera du connecteur d'implication $A \to B$ qu'on peut remplacer par $\neg A \lor B$, ceci afin de limiter les cas à traiter dans les preuves. De même, par dualité $\land/\lor$, on ne traitera pas le cas de la disjonction.

Exercice 1 *Deux présentations de* LK_0

1. Montrer que les règles d'affaiblissement sont admissibles dans le système additif.
2. Montrer que les présentations additives et multiplicatives de LK_0 sont équivalentes.
3. De quelles règles a-t-on besoin pour cela ?

Exercice 2 *Réversibilité sémantique*

Une règle est dite *sémantiquement réversible* lorsque la validité de la conclusion entraîne celle des prémisses.

1. Quelles sont les règles sémantiquement réversibles des connecteurs de LK_0 (en comptant les versions additive et multiplicative de chaque règle) ? Donner un contre-exemple pour celles qui ne le sont pas.
2. Montrer la complétude du fragment sémantiquement réversible de LK_0.

Exercice 3 *Réversibilité syntaxique*

Une règle est dite *syntaxiquement réversible* lorsqu'on peut prouver les prémisses à partir de la conclusion.

1. Pourquoi appelle-t-on ces règles des règles « réversibles » ? À quoi cela peut-il servir ?
2. Utiliser l'exercice précédent pour trouver quelles sont les règles de connecteurs syntaxiquement réversibles.
3. Déterminer directement quelles sont les règles syntaxiquement réversibles de LK_0 (en comptant les versions additive et multiplicative de chaque règle) ? Donner un contre-exemple pour celles qui ne le sont pas.
4. Donner un algorithme pour décider le fragment syntaxiquement réversible de LK_0.
   Montrer sa correction et sa complétude.

On ajoute à présent à LK_0 les règles des quantificateurs pour obtenir LK :

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.A, \Delta}\ \exists_d \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A \vdash \Delta}\ \exists_g \ \ (x \notin FV(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.A, \Delta}\ \forall_d \ \ (x \notin FV(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A \vdash \Delta}\ \forall_g$$

Exercice 4

Prouver les formules suivantes dans LK.

1. $(\exists y.\forall x.\, P(x,y)) \to \forall x.\exists y.\, P(x,y)$
2. $((\forall x.\, A) \to B) \to \exists x.\, (A \to B)$
3. $((\exists x.\, A) \to B) \to \forall x.\, (A \to B)$ (si $x \notin FV(B)$)
4. $((\forall x.\, A) \land B) \to \forall x.\, (A \land B)$ (si $x \notin FV(B)$)
5. $\neg(\forall x.\, A) \to \exists x.\, \neg A$
6. $\neg(\exists x.\, A) \to \forall x.\, \neg A$
7. $\exists y.\, (Py \to \forall x.P\, x)$

Exercice 5 *Mise en forme prénexe*

Démontrer que toute formule est équivalente à une formule en forme prénexe.

Solutions

▸ Exercice 1

1. Les règles d'affaiblissement sont admissibles dans le système additif : il suffit de les reporter aux feuilles et de les intégrer aux axiomes. La preuve formelle se fait par induction sur la dérivation.
2. il y a quatre cas à traiter :
   – l'axiome : $\overline{A \vdash A}$ est un cas particulier de $\overline{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$.
   Pour la réciproque, il suffit de mettre des affaiblissements :
   $$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A}\,W_g}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,W_d$$
   – la coupure :
   $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta}\,\text{Cut (m)}}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta}\,C_g}{\Gamma \vdash \Delta}\,C_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vdash \Delta_1}\,W_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,W_d \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}\,W_g}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A, \Delta_1, \Delta_2}\,W_d}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,\text{Cut (a)}$$
   – l'introduction à droite de la conjonction : Elle se traite exactement comme la coupure.
   – l'introduction à gauche de la conjonction :
   $$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}\,W_g}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g\text{ (m)} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}\,W_g}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g\text{ (m)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \vdash \Delta}\,\wedge_g^1}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g^2}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,C_g$$
3. On a besoin des règles structurelles. Si on les retire, les deux jeux de connecteurs ne sont plus les mêmes et on retrouve les connecteurs $\otimes$, $⅋$, $\oplus$ et & de la logique linéaire.

▸ Exercice 2

1. On rappelle la définition de validité :

   Définition ***Validité d'un séquent***
   Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si et seulement si $\models \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$, ce qui signifie que pour toute interprétation ρ des variables propositionnelles, $\rho \models \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$. Par définition de $\models$, cela signifie que pour toute valuation ρ, $\rho \models \bigwedge \Gamma$ entraîne $\rho \models \bigvee \Delta$. Ceci veut dire que si une valuation ρ valide toute les formules de Γ, alors ρ valide au moins l'une des formules de Δ.

   – $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g$: La validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$ et $\rho \models A \wedge B$, alors $\rho \models \bigvee \Delta$ ». Par définition de la validité d'une conjonction, $\rho \models A \wedge B$ est exactement $\rho \models A$ et $\rho \models B$. Ainsi, la validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$ et $\rho \models A$ et $\rho \models B$, alors $\rho \models \bigvee \Delta$ » qui est exactement la validité de la prémisse.
   – $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\wedge_d$: La validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors $\rho \models A \wedge B$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ ». Par définition de la validité d'une conjonction, $\rho \models A \wedge B$ est exactement $\rho \models A$ et $\rho \models B$ qui entraîne $\rho \models A$. La validité de la conclusion entraîne que « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors $\rho \models A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ » qui est la validité de la première prémisse. On fait de même pour la seconde prémisse.
   – $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg_g$: La validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors $\rho \models \neg A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ ». Par définition de la validité d'une négation, $\rho \models \neg A$ est exactement $\rho \not\models A$. Ainsi, la validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors $\rho \not\models A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ ». De ce fait, si $\rho \models A$, $\rho \not\models A$ est faux donc $\rho \models \bigwedge \Gamma$ et $\rho \models A$ entraîne que $\rho \models \bigvee \Delta$, qui est la validité de la prémisse.
   – $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg_d$: La validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$ et $\rho \models A$, alors $\rho \models \bigvee \Delta$ ». Par définition de la validité d'une négation, $\rho \models \neg A$ est exactement $\rho \not\models A$. Ainsi, la validité de la conclusion est « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$ et

$\rho \not\models A$, alors $\rho \models \bigvee \Delta$ ». De ce fait, si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors ou bien $\rho \models A$, ou bien $\rho \not\models A$, ce qui entraîne que $\rho \models \bigvee \Delta$, qui est la validité de la prémisse : « si $\rho \models \bigwedge \Gamma$, alors $\rho \models A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ ».

2. Prenons un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ valide. On cherche à obtenir une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans notre fragment. Pour cela, on va faire une récurrence sur le nombre de connecteurs qui apparaissent dans $\Gamma \cup \Delta$.

$\wedge$ présent dans $\Gamma = \Gamma', A \wedge B$: « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ et $\rho \models A \wedge B$ entraîne $\rho \models \bigvee \Delta$ », ce qui implique « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ et $\rho \models A$ et $\rho \models B$ entraîne $\rho \models \bigvee \Delta$ » par réversibilité de $\wedge_g$. Comme il y a là un connecteur de moins, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir une preuve de $\Gamma, A, B \vdash \Delta$. On utilise alors la règle $\wedge_g$ pour conclure.

$\wedge$ présent dans $\Delta = \Delta', A \wedge B$: « $\rho \models \bigwedge \Gamma$ entraîne $\rho \models A \wedge B$ ou $\rho \models \bigvee \Delta'$ », ce qui implique « $\rho \models \bigwedge \Gamma$ entraîne $\rho \models A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta'$ » et « $\rho \models \bigwedge \Gamma$ entraîne $\rho \models B$ ou $\rho \models \bigvee \Delta'$ » par réversibilité de $\wedge_d$. Comme il y a là un connecteur de moins, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir des preuves de $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma \vdash B, \Delta$. On utilise alors la règle $\wedge_d$ pour conclure.

$\neg$ présent dans $\Gamma = \Gamma', \neg A$: « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ et $\rho \models \neg A$ entraîne $\rho \models \bigvee \Delta$ », ce qui implique « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ entraîne $\rho \models A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ » par réversibilité de $\neg_g$. Comme il y a là un connecteur de moins, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir une preuve de $\Gamma \vdash A, \Delta$. On utilise alors la règle $\neg_g$ pour conclure.

$\neg$ présent dans $\Delta = \Delta', \neg A$: « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ entraîne $\rho \models \neg A$ ou $\rho \models \bigvee \Delta$ », ce qui implique « $\rho \models \bigwedge \Gamma'$ et $\rho \models A$ entraîne $\rho \models \bigvee \Delta$ » par réversibilité de $\neg_d$. Comme il y a là un connecteur de moins, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir une preuve de $\Gamma, A \vdash \Delta$. On utilise alors la règle $\neg_d$ pour conclure.

Voici les contre-exemples pour les règles non réversibles :

$\wedge_g$ **(a)** Prenons ρ tel que $\rho(A) = \rho(B) = 0$ et choisissons $\Gamma = \emptyset$ et $\Delta = \{A, B\}$. Alors $\rho \not\models \bigvee \Delta$ et $\rho \not\models A \vee \bigvee \Delta$ donc ρ ne valide pas $\Gamma, A \vdash \Delta$. Par contre, ρ valide $\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$.

$\wedge_d$ **(m)** Prenons ρ tel que $\rho(B) = 0$. Alors $\rho \not\models \bigwedge \Gamma_1$ donc $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2$ est valide puisque la prémisse est fausse. Par contre, ρ ne valide pas $\Gamma_2 \vdash B, \Delta_2$ si $\Gamma_2 = \Delta_2 = \emptyset$.

▸ Exercice 3

1. Ces règles sont dites réversibles car leur application n'a rien de définitif : on peut toujours revenir aux prémisses. Cela sert en recherche automatique de preuves : on sait qu'on peut toujours appliquer ces règles et décomposer les séquents sans perdre de prouvabilité (à cause d'un mauvais choix par exemple).

2. Les règles réversibles sont :
   - les deux variantes de la règle d'axiome (mais c'est trivial),
   - les règles de contraction (par affaiblissement) et d'échange (la règle est involutive),
   - la règle de coupure additive,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\, W_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\, W_d$$

   - la règle d'introduction gauche de la conjonction dans sa version multiplicative,

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash \Delta}\, W_g \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A, \Delta}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash B, \Delta}\,\text{Axiom}}{\Gamma, A, B \vdash A \wedge B, \Delta}\, \wedge_d\ (a)}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}\, \text{Cut (a)}$$

   - la règle d'introduction droite de la conjonction dans sa version additive,

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A, \Delta}\,\text{Axiom (a)}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A, \Delta}\, \wedge_g\ (m)}{\Gamma \vdash A, \Delta}\, \text{Cut (a)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash B, \Delta}\,\text{Axiom}}{\Gamma, A \wedge B \vdash B, \Delta}\, \wedge_g\ (m)}{\Gamma \vdash B, \Delta}\, \text{Cut (a)}$$

   - La règle d'introduction gauche de la disjonction dans sa version additive (par dualité),
   - la règle d'introduction droite de la disjonction dans sa version multiplicative (par dualité),
   - la règle d'introduction droite de l'implication,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash A \to B, \Delta$}
\RightLabel{W_d}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \to B, B, \Delta$}
\RightLabel{W_g}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A \to B, B, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, B \vdash B, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A, B, \Delta$}
\RightLabel{$\to_g$ (m)}
\BinaryInfC{$\Gamma, A, A \to B \vdash B, \Delta$}
\RightLabel{Cut (a)}
\BinaryInfC{$\Gamma, A \vdash B, \Delta$}
\end{prooftree}
$$

– la règle d'introduction gauche de l'implication dans sa version additive,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, A \to B \vdash \Delta$}
\RightLabel{W_g}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \to B, B \vdash \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, B \vdash B, \Delta$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\Gamma, B \vdash A \to B, \Delta$}
\RightLabel{Cut (a)}
\BinaryInfC{$\Gamma, B \vdash \Delta$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, A \to B \vdash \Delta$}
\RightLabel{W_d}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \to B \vdash A, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A, B, \Delta$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \to B, A, \Delta$}
\RightLabel{Cut (a)}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A, \Delta$}
\end{prooftree}
$$

– les règles d'introduction de la négation.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, \neg A \vdash \Delta$}
\RightLabel{W_d}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash A, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A, \Delta$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg A, A, \Delta$}
\RightLabel{Cut (a)}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A, \Delta$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \neg A, \Delta$}
\RightLabel{W_d}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash \neg A, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A, \Delta$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, \neg A \vdash \Delta$}
\RightLabel{Cut (a)}
\BinaryInfC{$\Gamma, A \vdash \Delta$}
\end{prooftree}
$$

Voici des contre-exemples pour les règles non-réversibles :
– la coupure multiplicative pour $\Gamma_1 = \Delta_2 = \{A\}$ et $\Gamma_2 = \Delta_1 = \varnothing$: pas de preuve de $\varnothing \vdash A$ ou $A \vdash \varnothing$,
– les affaiblissement pour $\Gamma = \{A\}$ et $\Delta = \varnothing$ (et l'inverse) : pas de preuve de $\varnothing \vdash A$ ou $A \vdash \varnothing$,
– la règle d'introduction de l'implication à gauche dans sa version multiplicative pour $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Delta_1 = \varnothing$ et $\Delta_2 = A \to B$: pas de preuve de $B \vdash$,
– les règles d'introduction de la conjonction à gauche en version additive pour $\Gamma = \varnothing$ et $\Delta = A \wedge B$: pas de preuve de $A \vdash A \wedge B$ ou $B \vdash A \wedge B$,
– les règles d'introduction de la conjonction à droite en version multiplicative pour $\Gamma_1 = \Delta_1 = \Delta_2 = \varnothing$ et $\Gamma_2 = A \wedge B$: pas de preuve de $\vdash A \wedge B$,
– la règle d'introduction de la disjonction à gauche dans sa version multiplicative pour $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Delta_1 = \varnothing et \Delta_2 = A \vee B$: pas de preuve de $A \vdash$,
– les règles d'introduction de la disjonction à droite en version additive pour $\Gamma = A \vee B$ et $\Delta = \varnothing$: pas de preuve de $A \vee B \vdash A$ ou $A \vee B \vdash B$,

3. On introduit tous les connecteurs que l'on peut rencontrer. Une fois ceci fait, le séquent est de la forme

$$X_1, \ldots, X_n \vdash Y_1, \ldots, Y_m$$

S'il en existe une preuve, il en existe une preuve sans coupure grâce au théorème d'élimination des coupures. Modulo les règles structurelles, une preuve sans coupure ne peut utiliser que la règle Axiome (il n'y a plus de connecteur à introduire) et il faut et suffit pour cela que l'un des Y_j soit égal à l'un des X_i : $\exists i, j, X_i = Y_j$.
La correction de cet algorithme est évidente : on a utilisé à chaque étape une règle de LK_0 donc on obtient une preuve dans LK_0. Chaque règle d'introduction étant réversible, on ne perd pas de prouvabilité et cet algorithme est en outre complet. Au total, on a une procédure de décision pour ce fragment.

▸ **Exercice 4**

1.
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\vdash P(x_0, y_0) \vdash P(x_0, y_0)$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$\vdash P(x_0, y_0) \vdash \exists y.\, P(x_0, y)$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x.\, P(x, y_0) \vdash \exists y.\, P(x_0, y)$}
\RightLabel{$\forall_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x.\, P(x, y_0) \vdash \forall x. \exists y.\, P(x, y)$}
\RightLabel{$\exists_g$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists y. \forall x.\, P(x, y) \vdash \forall x. \exists y.\, P(x, y)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash (\exists y. \forall x.\, P(x, y)) \to \forall x. \exists y.\, P(x, y)$}
\end{prooftree}
$$

2.
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$B, A \vdash B$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$B \vdash A \to B$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$B \vdash \exists x.\, (A \to B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$A \vdash A, B$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash A, A \to B$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$\vdash A, \exists x.\, (A \to B)$}
\RightLabel{$\forall_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x.\, A, \exists x.\, (A \to B)$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$(\forall x.\, A) \to B \vdash \exists x.\, (A \to B)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\forall x.\, A) \to B) \to \exists x.\, (A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

3.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash B}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A, B}\,\text{Axiom}}{A \vdash \exists x.\, A, B}\,\exists_d}{(\exists x.\, A) \to B, A \vdash B}\,\to_g}{(\exists x.\, A) \to B \vdash A \to B}\,\to_d}{(\exists x.\, A) \to B \vdash \forall x.\, (A \to B)}\,\forall_d \quad \text{car } x \notin FV((\exists x.\, A) \to B) = FV(B)}{\vdash ((\exists x.\, A) \to B) \to \forall x.\, (A \to B)}\,\to_d$$

4.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,\text{Axiom} \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,\text{Axiom}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge_d}{\forall x.\, A, B \vdash A \wedge B}\,\forall_g}{\forall x.\, A, B \vdash \forall x.\, (A \wedge B)}\,\forall_d \quad \text{car } x \notin FV(\forall x.\, A, B) = FV(B)}{(\forall x.\, A) \wedge B \vdash \forall x.\, (A \wedge B)}\,\wedge_g}{\vdash ((\forall x.\, A) \wedge B) \to \forall x.\, (A \wedge B)}\,\to_d$$

5.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Axiom}}{\vdash A, \neg A}\,\neg_d}{\vdash A, \exists x.\, \neg A}\,\exists_d}{\vdash \forall x.\, A, \exists x.\, \neg A}\,\forall_d}{\neg(\forall x.\, A) \vdash \exists x.\, \neg A}\,\neg_g}{\vdash \neg(\forall x.\, A) \to \exists x.\, \neg A}\,\to_d$$

6.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Axiom}}{A \vdash \exists x.\, A}\,\exists_d}{\neg(\exists x.\, A), A \vdash}\,\neg_g}{\neg(\exists x.\, A) \vdash \neg A}\,\neg_d}{\neg(\exists x.\, A) \vdash \forall x.\, \neg A}\,\forall_d}{\vdash \neg(\exists x.\, A) \to \forall x.\, \neg A}\,\to_d$$

7. Cet énoncé est le paradoxe du buveur qui dit que dans chaque bar, il y a une personne telle que si elle est en train de boire, alors tout le monde est en train de boire. La preuve informelle se fait ainsi :
   – ou bien tous le monde boit et on peut prendre une personne quelconque,
   – ou bien au moins une personne ne boit pas et on choisit cette personne. Comme elle ne boit pas, la prémisse de l'implication est fausse donc l'implication est vraie.

   On peut formaliser directement cette preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\, P\,x, P\,y_0 \vdash \forall x. P\,x}\,\text{Axiom}}{\forall x.\, P\,x \vdash P\,y_0 \to \forall x. P\,x}\,\to_d}{\forall x.\, P\,x \vdash \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\exists_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\,x_0 \vdash P\,x_0, \forall x. P\,x}\,\text{Axiom}}{\vdash P\,x_0, P\,x_0 \to \forall x. P\,x}\,\to_d}{\vdash P\,x_0, \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\exists_d}{\vdash \forall x.\, P\,x, \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\forall_d \quad x_0 \notin \ldots}{\neg(\forall x.\, P\,x) \vdash \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\neg_g}{(\forall x.\, P\,x) \vee \neg(\forall x.\, P\,x) \vdash \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\vee_g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\, P\,x \vdash \forall x.\, P\,x}\,\text{Axiom}}{\vdash \forall x.\, P\,x, \neg(\forall x.\, P\,x)}\,\neg_d}{\vdash (\forall x.\, P\,x) \vee \neg(\forall x.\, P\,x)}\,\vee_d}{\vdash \exists y.\, (P\,y \to \forall x. P\,x)}\,\text{Cut}$$

   Évidemment, il en existe également une preuve sans coupure, que voici :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Py_0, Px_0 \vdash P\,x_0, \forall x. P\,x}\,\text{Axiom}}{Py_0 \vdash P\,x_0, Px_0 \to \forall x. P\,x}\,\to_d}{Py_0 \vdash P\,x_0, \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x)}\,\exists_d}{Py_0 \vdash \forall x. P\,x, \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x)}\,\forall_d \quad x_0 \notin \ldots}{\vdash Py_0 \to \forall x. P\,x, \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x)}\,\to_d}{\dfrac{\vdash \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x), \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x)}{\vdash \exists y.\, (Py \to \forall x. P\,x)}\,C_d}\,\exists_d$$

▶ **Exercice 5** Tout d'abord, il faut préciser la notion d'équivalence que l'on souhaite : sémantique ou syntaxique ? L'équivalence sémantique est souvent suffisante mais l'équivalence syntaxique est plus forte (lorsqu'on travaille avec un système de preuve fixé). On va donc prendre cette dernière. Il nous faut démonter qu'une formule F est équivalente à sa forme prénexe $\tilde{F}$, c'est-à-dire $\vdash F \leftrightarrow \tilde{F}$ (même si l'inter-dérivabilité suffit : $F \vdash \tilde{F}$ et $\tilde{F} \vdash F$). Certaines des implications ont été démontrées à l'exercice précédent.