TD 9 : Calcul des séquents

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Voici les règles du calcul des séquents LK_0 (le « 0 » exprime qu'on ne s'intéresse qu'au fragment propositionnel).

Le groupe identité :

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{Axiom} \qquad \dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \text{Cut}$$

Le groupe structurel :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ W_g \qquad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ C_g \qquad \dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ E_g$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ W_d \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ C_d \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ E_d$$

Le groupe logique :

$$\dfrac{\Gamma_1, B \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \to_g \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \land_g^1 \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \land_g^2 \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \lor_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_g$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to_d \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \land_d \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \lor_d^1 \quad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \lor_d^2 \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg_d$$

Exercice 1

Prouver les théorèmes suivants dans LK_0.

1. $\neg\neg P \to P$,
2. $((P \to Q) \to P) \to P$,
3. $(P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$,
4. $P \land (Q \lor R) \to (P \land Q) \lor (P \land R)$,
5. $((P \lor Q) \to R) \to (P \to R) \land (Q \to R)$,
6. $(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R$.

Exercice 2 *Traduction de la déduction naturelle en calcul des séquents*

1. Rappeler les règles de la déduction naturelle propositionnelle intuitionniste.
2. Montrer que toute règle de NJ_0 est admissible dans LJ_0 + (Cut).
3. Comment supprimer la règle (Cut) ?
4. Étendre ce résultat à la traduction de NK_0 dans LK_0.

Exercice 3 ***Traduction inverse***

1. Traduire les règles de LJ_0 dans NJ_0.
2. Comment pourrait-on étendre ce résultat au cas classique ? Quel outil utiliser ?
3. Afin de raccourcir la preuve, faire directement une traduction de LK_0 dans NK_0 sans passer par LJ_0.
   Indication : Démontrer au préalable l'admissibilité de la règle $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\,\text{DNE}$ dans NK_0.