

TD 2 : Curry-Howard propositionnel

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Réduction du sujet en λ -calcul

Exercice 1

On veut montrer que le λ -calcul simplement typé admet la propriété de réduction du sujet :

Si $\Gamma \vdash M : T$ et si $M \rightarrow_{\beta} M'$, alors $\Gamma \vdash M' : T$.

1. Montrer le *lemme d'affaiblissement* :

Si $\Gamma \vdash M : T$, alors $\Gamma, x : T' \vdash M : T$.

2. Montrer le *lemme de substitution* :

Si $\Gamma, x : T' \vdash M : T$ et si $\Gamma \vdash N : T'$, alors $\Gamma \vdash M[N/x] : T$.

3. Montrer le *lemme d'inversion* :

Si $\Gamma \vdash \lambda x.M : T$, alors T est de la forme $T' \rightarrow T''$ et $\Gamma, x : T' \vdash M : T''$.

4. Conclure.

2 Déduction naturelle et Curry-Howard

Exercice 2

Prouver en déduction naturelle les théorèmes suivants ou donner directement un λ -terme de ce type.

Vérifier (par exemple avec Coq) sur quelques cas que l'arbre de typage du λ -terme correspond à la dérivation dans NJ.

1. $P \rightarrow \neg\neg P$
2. $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
3. $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$,
4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$,
5. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P$,
6. $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$,
7. $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \rightarrow P \wedge Q \rightarrow R$,
8. $(P \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow \neg\neg(P \rightarrow Q)$.

En supposant à présent le principe du tiers exclu pour P , faire de même pour

9. $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$,
10. $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$,
11. $(P \rightarrow P \wedge Q) \vee (Q \rightarrow P \wedge Q)$.

3 Théorème de Glivenko

Théorème (GLIVENKO)

Si un énoncé F est prouvable en logique propositionnelle classique, alors $\neg\neg F$ est prouvable en logique propositionnelle intuitionniste.

Exercice 3 Échauffement

Montrer les théorèmes suivants en déduction naturelle intuitionniste :

Double_neg $P \rightarrow \neg\neg P$ **Ex_middle** $\neg\neg(P \vee \neg P)$,**And_intro** $\neg\neg P \rightarrow \neg\neg Q \rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$,**And_elim** $\neg\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg\neg P$,**Or_intro** $\neg\neg P \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$,**Or_elim** $\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg(P \rightarrow R) \rightarrow \neg\neg(Q \rightarrow R) \rightarrow \neg\neg R$.**Imp_intro** $(P \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow \neg\neg(P \rightarrow Q)$,**Imp_elim** $\neg\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg\neg P \rightarrow \neg\neg Q$,**Exercice 4 Théorème de Glivenko**

Démontrer (sur papier) le théorème de Glivenko.

4 Devoir maison

Vous devez rendre pour le 4 octobre l'un des deux DM ci-dessous. Ils sont à faire en binôme.

Devoir à la maison Preuve complète de réduction du sujet

Rédiger complètement et en détail la preuve de réduction du sujet du λ -calcul simplement typé (avec les trois lemmes).

Devoir à la maison Théorème de Glivenko en Coq

Formaliser une preuve complète du théorème de Glivenko en Coq.

Pour cela, il faudra commencer par formaliser les systèmes de preuves NJ et NK.