TD 11 : Réseaux de Pétri

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Définition (Réseau de Pétri)

Un *réseau de Pétri* est la donnée d'un graphe orienté biparti $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, E)$ et d'une fonction $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$.

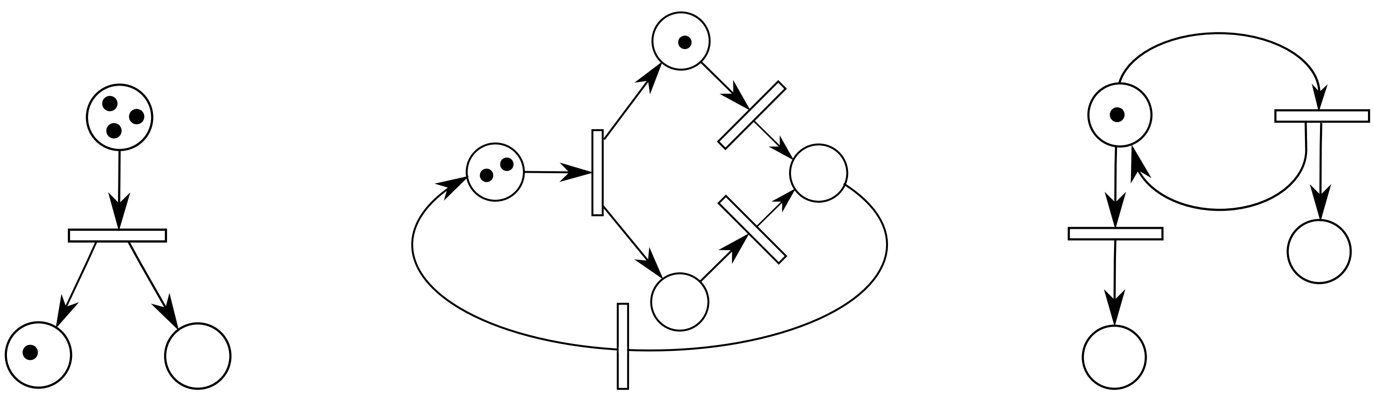
Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *places* et ceux de $\mathcal{T}$ les *transitions*. On note ${}^\bullet t$ et $t^\bullet$ respectivement les voisinages négatifs et positifs d'une transition. On définit de manière analogue ${}^\bullet p$ et $p^\bullet$. Lorsque chaque place a au plus une transition antécédent et une transition successeur, le réseau est un *graphe d'événements* et on peut noter ${}^\bullet p$ et $p^\bullet$ les uniques transitions précédant et suivant la place p si elles existent. La quantité $\mu(p)$ est appelé *marquage* (initial) de p. Elle dénote le nombre de *jetons* présents dans la place p. On représente graphiquement les places par des cercles contenant des jetons et les transitions par des rectangles.

Définition (Évolution d'un réseau de Pétri)

Un réseau de Pétri *évolue* par déplacement des jetons entre les places selon les transitions. Plus précisément, une transition t est *franchissable* si $\forall p \in {}^\bullet t, \mu(p) \geqslant 1$ et on effectue une telle transition (on dit qu'on *tire* la transition) en retirant un jeton de toutes les places de ${}^\bullet t$ et ajoutant un jeton dans toutes les places de $t^\bullet$.

Exercice 1

Donner l'évolution des réseaux de Pétri suivants. Quelles propriétés les distinguent ?



Exercice 2

Construire des réseaux de Pétri qui effectuent les opérations suivantes. Dans la mesure du possible, essayer de se restreindre aux graphes d'événements.

1. choix non déterministe
2. addition du nombre de jetons situés dans deux places
3. soustraction d'une constante
4. multiplication par une constante
5. division par une constante
6. un compteur binaire
7. le schéma d'attente d'une file G/D/1 et d'une file G/D/C
8. un réseau de Jackson fermé cyclique (lorsqu'on quitte on file, on entre dans la suivante)

Exercice 3 (Réseaux de Pétri bornés)

Un marquage est dit *accessible* s'il existe une évolution du réseau de Pétri vers ce marquage. Un réseau de Pétri est dit M-borné si le nombre de jetons dans chaque place ne peut dépasser M.

1. Comment caractériser les réseaux M-bornés en terme de marquages accessibles ?
2. En déduire un algorithme pour déterminer si un réseau de Pétri est M-borné. Quel est sa complexité ?
3. Déterminer une transformation entre réseaux de Pétri qui force une place d'un réseau général à être M-bornée. Justifier la correction de la transformation.

Exercice 4 (Récurrence (max,plus)-linéaire et graphe d'événements temporisé)

On considère une récurrence (max,plus)-linéaire matricielle dont la forme générale est :

$$X_n = A_0 \otimes X_n \oplus A_1 \otimes X_{n-1} \oplus \cdots \oplus A_K \otimes X_{n-K}$$

où les X_i sont des vecteurs et les A_j sont des matrices sur le semi-anneau (max,plus).

1. Par analogie avec le cas des récurrences n-linéaires usuelles, exprimer cette récurrence sous forme d'une chaîne de Bellman, *i.e.* d'une récurrence à un pas. On peut voir les chaînes de Bellman comme l'analogue des chaînes de Markov pour les semi-anneaux. Quelle hypothèse faut-il faire sur A_0 ?
2. Rappeler l'équation (max,plus) qui permet de calculer le dateur $d_\tau(n)$ qui donne la date du n^{e} tirage de la transition τ. De même, donner l'équation (min, plus) qui exprime le compteur $n_\tau(t)$ donnant le nombre de tirages de la transition τ dans l'intervalle $[0, t]$.
3. Réciproquement, comment associer un graphe d'événements temporisé à une récurrence (max,plus)-linéaire ? On rappelle qu'un *graphe d'événements temporisé* est un graphe d'événements muni d'une *fonction de retard* $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$. L'apparition d'un jeton dans la place p lorsqu'on tire la transition $^\bullet p$ est alors retardée de $\sigma(p)$.
4. Les équations précédentes définissent une récurrence (max,plus) linéaire matricielle pour le dateur et (min, plus) pour le compteur. Le comportement asymptotique d'une chaîne de Bellman est donné par le résultat suivant :

   Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $d \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N$, $A^{\otimes(n+d)} = \lambda d \otimes A^{\otimes n}$.

   Comment ce résultat se traduit-il concrètement pour le graphe d'événements temporisé dont le dateur est décrit par la matrice A ?
5. En examinant les « transitions limitantes » du graphe d'événements, donner la signification des paramètres λ, d et N dans le résultat de la question précédente.

Exercice 5 (Accessibilité)

1. Dans le cas général, le problème de l'accessibilité est EXPSPACE-difficile. Donner un semi-algorithme pour le résoudre.
2. Montrer que si l'on retire la contrainte de positivité du marquage, alors on peut résoudre le problème de l'accessibilité en temps polynomial avec des outils d'algèbre linéaire. En déduire une méthode de preuve d'inaccessibilité.