# TD 10 : Réseaux de Jackson

lionel.rieg@ens-lyon.fr

## Exercice 1 (File M/M/c)

On s'intéresse à une file d'attente avec $c > 1$ serveurs, mais les arrivées et les services restent des processus de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Dans ce contexte, on définit la charge du système par $r = \lambda/\mu$ et le taux d'utilisation par $\rho = r/c$.

1. Donner le graphe de la chaîne induite et le générateur infinitésimal.
2. Donner et démontrer la condition de stabilité de la file.
3. Calculer la distribution stationnaire.
4. Déterminer $L_q$ le nombre moyen de personne en attente dans le système.
5. Dans le cas d'une file G/M/c, donner la relation entre $W$ le temps de séjour moyen et $W_q$ le temps d'attente moyen.
6. En déduire $L$, $W$ et $W_q$.
7. Donner la probabilité d'être servi immédiatement à l'arrivée dans la file.

## Exercice 2 (Augmentation de capacité)

on reprend la file M/M/c de l'exercice précédent et, pour fixer les idées, on prend $\mu = 1$, $\rho = 0,75$ et $c = 12$. On a donc $\lambda = r = 9$ arrivées par unité de temps en moyenne, ce qui fait $\Delta = c - r = 3$ serveurs pour absorber les variations de trafic. Supposons que les arrivées quadruplent : $\lambda' = 4\lambda = 36$, comment choisir $c'$ ?

1. Donner différentes grandeurs qu'on peut vouloir garder constantes pour la file d'attente.
2. Pour chacune, calculer le nouveau nombre de serveurs nécessaires.

## Exercice 3 (Réseaux de Jackson)

Un réseau de Jackson est un ensemble de $N$ files d'attente de types G/M/c$_p$ dont les taux de service sont caractérisés par $\mu_p(n_p) = \mu_p \cdot min(c_p, n_p)$ où $n_p$ est le nombre de personnes dans la file $p$ et $c_p$ son nombre de serveurs en parallèle. Ces files d'attente sont branchées les unes sur les autres de sorte qu'à la sortie de la file $p$, on peut :

- entrer dans la file $q$ avec probabilité $r_{p,q}$ ;
- définitivement sortir du système avec probabilité $r_{p,N+1}$.

Dans la suite, on suppose $\mu_p(n_p) > 0$ dès que $n_p > 0$ ainsi que $r_{p,p} = 0$ pour simplifier. Les arrivées exogènes (de l'extérieur du système) dans la file $p$ forment un processus de Poisson d'intensité $\overline{\lambda}_p$. On admet que le vecteur $X(t)$ du nombre de personnes dans chaque file est une chaîne de Markov à temps continu.

1. Schématiser ce système et décrire le générateur infinitésimal de $X(t)$.
2. On suppose le système en régime stationnaire. Donner les équations d'équilibre de l'espérance des files.
3. Montrer que si le réseau est sans capture, *i.e.* si tout paquet a une probabilité non nulle de sortir du système, alors le système précédent possède une unique solution positive et finie.
4. Démontrer le théorème suivant :

   **Théorème**
   Soit une chaîne de Markov à temps continu irréductible de générateur infinitésimal $Q = (q_{ij})$.
   Si on peut trouver une distribution $\pi$ et des nombre positifs $\tilde{q}_{ij}$ (pour $i \neq j$) tels que $\pi(i)\tilde{q}_{ij} = \pi(j)q_{ji}$ et $\sum_{j \neq i} \tilde{q}_{ij} = -q_{ii}$,
   alors $\pi$ est la distribution stationnaire de la chaîne.

5. Supposons que chaque file soit M/M/c indépendante des autres. Quelle est la distribution stationnaire attendue pour $X(t)$ ?
6. Montrer que c'est effectivement la distribution stationnaire du système (alors que les chaînes ne sont pas indépendantes).